UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS – UFAL

CAMPUS ARAPIRACA

MATEMÀTICA - LICENCIATURA

JUCIELE DA SILVA LIRA

A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

ARAPIRACA

2024

Juciele da Silva Lira

A transposição didática dos números irracionais

Trabalho de Conclusão de Curso entregue à Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alcindo Teles Galvao.

Arapiraca

2024

Universidade Federal de Alagoas – UFAL
Campus Arapiraca
Biblioteca Setorial *Campus* Arapiraca - BSCA

L768t Lira, Juciele da Silva
A transposição didática dos números irracionais / Juciele da Silva Lira. – Arapiraca, 2024.
41 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Alcindo Teles Galvão.
Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas, *Campus* Arapiraca, Arapiraca, 2024.
Disponível em: Universidade Digital (UD) – UFAL (*Campus* Arapiraca).
Referências: f. 38-41.

1. Matemática. 2. Números irracionais. 3. Ensino e aprendizagem. I. Galvão, Alcindo Teles. II. Título.

CDU 51

Bibliotecário responsável: Nestor Antonio Alves Junior
CRB - 4 / 1557

Juciele da Silva Lira

A transposição didática dos números irracionais

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), entregue à Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

Data de Aprovação: 16/02/2024.

Banca Examinadora

gov.br ALCINDO TELES GALVAO
Data: 29/02/2024 15:16:24-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Alcindo Teles Galvão
Universidade Federal de Alagoas- UFAL
Campus de Arapiraca
(Orientador)

gov.br MORENO PEREIRA BONUTTI
Data: 29/02/2024 15:35:34-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Moreno Pereira Bonutti
Universidade Federal de Alagoas- UFAL
Campus de Arapiraca
(Examinador)

gov.br EBEN ALVES DA SILVA
Data: 29/02/2024 18:50:09-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Eben Alves da Silva
Universidade Federal de Alagoas- UFAL
Campus de Arapiraca
(Examinador)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, fonte da minha vida, inspiração e sabedoria. Até aqui o Senhor me sustentou e nunca me abandonou! Obrigada por estar sempre comigo e pelo Teu grande amor!

Agradeço especialmente ao meu pai José Manoel e à minha mãe Genieide que me incentivaram, me ajudaram muito e me forneceram os meios para estudar, mesmo nos momentos mais difíceis vocês estiveram ao meu lado e sei que estarão sempre torcendo por mim! Amo muito vocês!

Ao meu esposo Yan Max por sempre estar ao meu lado me apoiando e incentivando e nunca deixar a “peteca” cair e aos meus filhos João Arthur e José Nícolas, que é o meu tudo! Amo muito vocês!

Agradeço ao meu orientador e professor Alcindo Teles Gavao pelo conhecimento compartilhado, pela experiência dividida, pelos importantes momentos de aprendizagem proporcionados, pela agradável companhia, pelas insistências e principalmente por ter me incentivado a chegar até aqui.

Agradeço o meu amigo e colega de sala Adriano Ribeiro que também passou por tudo isto, e juntos estamos vencendo mais esta etapa. Passamos por “maus bocados”, mas aqui estamos!! Agradeço a todos aqueles que me ajudaram e que estiveram presentes durante a realização desta difícil jornada.

RESUMO

A transposição didática dos números irracionais é um tema de grande relevância no contexto do ensino da Matemática. Os números irracionais, devido à sua natureza peculiar e propriedades específicas, apresentam desafios significativos quando se trata de transmitir esse conhecimento aos alunos. Em termos simples, a transposição didática refere-se ao processo de transformar conhecimentos científicos em conteúdos escolares acessíveis e compreensíveis para os estudantes. No caso dos números irracionais, essa tarefa é particularmente desafiadora. Esses números são números reais que não podem ser expressos como frações exatas, e eles são representados por decimais não periódicos, o que os diferencia dos números racionais. Um dos principais obstáculos na transposição didática dos números irracionais é a sua abstração. Ao contrário dos números racionais, que podem ser facilmente visualizados e relacionados a situações do cotidiano, os números irracionais não têm uma representação exata e sua natureza é mais abstrata. Portanto, os educadores precisam desenvolver estratégias pedagógicas eficazes para tornar os números irracionais mais concretos e compreensíveis para os alunos. O presente estudo tem como objetivo analisar a transposição didática dos números irracionais. A metodologia utilizada se trata de uma pesquisa qualitativa, por meio de uma revisão bibliográfica. Conclui-se que a transposição didática dos números irracionais é um desafio que exige estratégias pedagógicas cuidadosamente planejadas. A utilização de exemplos práticos, visualizações geométricas, recursos tecnológicos e a promoção da investigação são elementos fundamentais para promover a compreensão dos números irracionais e torná-los acessíveis aos estudantes. Superar esses desafios possibilita aos alunos uma base sólida de conhecimento matemático e habilidades para a aplicação dos números irracionais em diversos contextos.

Palavras-chave: matemática; números irracionais; ensino e aprendizagem.

ABSTRACT

The didactic transposition of irrational numbers is a topic of great relevance in the context of Mathematics teaching. Irrational numbers, due to their peculiar nature and specific properties, present significant challenges when it comes to conveying this knowledge to students. In simple terms, didactic transposition refers to the process of transforming scientific knowledge into accessible and understandable school content for students. In the case of irrational numbers, this task is particularly challenging. These numbers are real numbers that cannot be expressed as exact fractions, and they are represented by non-recurring decimals, which differentiates them from rational numbers. One of the main obstacles in the didactic transposition of irrational numbers is their abstraction. Unlike rational numbers, which can be easily visualized and related to everyday situations, irrational numbers do not have an exact representation and their nature is more abstract. Therefore, educators need to develop effective pedagogical strategies to make irrational numbers more concrete and understandable for students. The present study aims to analyze the didactic transposition of irrational numbers. The methodology used is qualitative research, through a bibliographic review. It is concluded that the didactic transposition of irrational numbers is a challenge that requires carefully planned pedagogical strategies. The use of practical examples, geometric visualizations, technological resources and the promotion of investigation are fundamental elements to promote the understanding of irrational numbers and make them accessible to students. Overcoming these challenges provides students with a solid foundation of mathematical knowledge and skills for applying irrational numbers in different contexts.

Keywords: mathematics; irrational numbers; teaching and learning.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 7
2 NÚMEROS NATURAIS, INTEIROS, RACIONAIS E IRRACIONAIS 10
2.1 ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES SOBRE NÚMEROS IRRACIONAIS 15
2.1.1 Teorema 16
2.1.2 Teorema 02 17
2.2 DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS 17
2.3 DESAFIOS NO ENSINO DE NÚMEROS IRRACIONAIS 18
3 TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA 22
3.1 PROCESSO DE TRANSPOSIÇÃO: DA TEORIA À SALA DE AULA 23
3.2 FATORES QUE INFLUENCIAM A TRANSPOSIÇÃO 24
3.3 CONTEXTO ESCOLAR E CURRICULAR 25
4 DESAFIOS E ESTRATÉGIAS PARA A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA DE NÚMEROS IRRACIONAIS 28
4.1 REPRESENTAÇÕES VISUAIS E GRÁFICAS 30
4.2 CONEXÕES COM SITUAÇÕES COTIDIANAS 32
4.3 ABORDAGENS INTERDISCIPLINARES 33
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 36
REFERÊNCIAS 38

1 INTRODUÇÃO

A transposição didática dos números irracionais é um tema relevante no contexto do ensino da Matemática. Os números irracionais, por sua natureza peculiar e propriedades específicas, apresentam desafios particulares na sua abordagem pedagógica. A transposição didática refere-se ao processo de transformar conhecimentos científicos em conteúdos escolares, tornando-os acessíveis e compreensíveis para os alunos.

Os números irracionais são números reais que não podem ser expressos como frações exatas. Eles são representados por decimais não periódicos e não podem ser escritos na forma de uma razão entre dois inteiros. Exemplos clássicos de números irracionais são a raiz quadrada de 2 ($\sqrt{2}$), o número π (pi) e o número de Euler (e). Esses números são fundamentais para a compreensão e desenvolvimento de diversos conceitos matemáticos, além de terem aplicação em áreas como física, engenharia, economia e computação.

A transposição didática dos números irracionais envolve uma série de desafios. Um dos principais é o aspecto abstrato desses números, que pode dificultar a sua compreensão pelos alunos. Ao contrário dos números racionais, que podem ser facilmente visualizados e relacionados a situações do cotidiano, os números irracionais não têm uma representação exata e sua natureza é mais abstrata. Isso exige do professor estratégias didáticas eficazes para tornar os números irracionais mais concretos e compreensíveis para os estudantes.

Uma estratégia comumente utilizada na transposição didática dos números irracionais é a utilização de exemplos práticos e visualizações geométricas. Por exemplo, ao abordar a raiz quadrada de 2 ($\sqrt{2}$), o professor pode recorrer a construções geométricas, como o famoso "quadrado de lado 1". A partir desse quadrado, é possível demonstrar geometricamente que a diagonal é igual a $\sqrt{2}$. Essa abordagem visual facilita a compreensão e permite que os alunos estabeleçam uma conexão mais concreta com os números irracionais.

Além disso, é importante considerar a progressão adequada no ensino dos números irracionais. Iniciar com noções básicas de números racionais e suas representações decimais periódicas é fundamental para que os alunos compreendam as diferenças e características dos números irracionais posteriormente. A partir desse embasamento, é possível introduzir gradualmente os números irracionais, explorando suas propriedades e aplicações.

Outro aspecto relevante na transposição didática dos números irracionais é a utilização de recursos tecnológicos e materiais manipuláveis. O uso de calculadoras, softwares educacionais, aparelhos interativos e materiais concretos auxilia os alunos na exploração e compreensão dos números irracionais. Através desses recursos, é possível realizar cálculos aproximados, visualizar gráficos e construir representações concretas dos números irracionais, facilitando o processo de aprendizagem.

Por fim, a transposição didática dos números irracionais requer uma abordagem que valorize a investigação, o questionamento e a construção de conhecimento pelos alunos. Incentivar a exploração, a resolução de problemas e o raciocínio matemático autônomo é essencial para que os alunos desenvolvam uma compreensão profunda e significativa dos números irracionais.

Assim, a transposição didática dos números irracionais é um desafio que requer estratégias pedagógicas cuidadosamente planejadas. A utilização de exemplos práticos, visualizações geométricas, recursos tecnológicos e a valorização da investigação são elementos fundamentais para promover a compreensão dos números irracionais e torná-los acessíveis aos estudantes. Ao superar esses desafios, é possível proporcionar aos alunos uma base sólida de conhecimento matemático e habilidades para a aplicação dos números irracionais em diversos contextos.

O presente estudo tem como objetivo geral analisar a transposição didática dos números irracionais. Como objetivos específicos, destacam-se apresentar o conceito de números naturais, inteiros, racionais e irracionais, discorrer sobre a transposição didática e identificar os desafios e estratégias para a transposição didática dos números irracionais.

A metodologia utilizada para a elaboração do estudo se trata de uma pesquisa qualitativa, por meio de uma revisão bibliográfica com buscas por sites, livros, artigos científicos e revistas especializadas sobre o tema, em plataformas de buscas como Google Acadêmico e LILACS, utilizando palavras-chave como matemática, transposição didática, números, números irracionais, entre demais palavras pertinentes ao tema.

A escolha por esta metodologia pode ser explicada pelo fato de ser possível a captação de um conjunto de situações ou fenômenos que não são obtidos por meio de questões ou indagações. Neste vasto campo, ao analisar as manifestações cotidianas dos atores sociais e ao registrá-los de forma descritiva, os pesquisadores adquirem um importante acervo da realidade.

Ao optar pela pesquisa bibliográfica, parte-se do entendimento que a forma como a consciência apreende a realidade poderá ser processual, aproximativa, acumulativa e determinada socialmente. Destaca-se que a pesquisa científica poderá ser apresentada de diversas maneiras, como a revisão bibliográfica, esta que foi utilizada no presente estudo, analisando todos os passos que serão seguidos para atingir os objetivos propostos.

Por fim, afirma-se que a revisão bibliográfica representa uma revisão de pesquisas, debates e discussões de autores sobre o tema analisado, ou seja, representa a contribuição das teorias de diversos autores para a elaboração de uma pesquisa, sendo efetuada através de uma análise criteriosa e ampla das publicações correntes em uma determinada área do conhecimento.

O presente estudo se justifica pela importância do tema. O conhecimento sobre números irracionais é de fundamental importância, pois eles constituem uma parte essencial da Matemática e têm aplicações em diversas áreas. Compreender os números irracionais permite explorar e descrever fenômenos complexos, como o comportamento de sequências infinitas, a geometria fractal e o cálculo diferencial e integral.

Além disso, esses números estão presentes em várias situações do cotidiano, como na medida de grandezas irracionalizáveis, na modelagem de curvas e na análise de probabilidades. Ter um domínio sólido dos números irracionais é essencial para o desenvolvimento de habilidades matemáticas avançadas e para a compreensão mais profunda dos princípios e aplicações da Matemática em diferentes campos.

2 NÚMEROS NATURAIS, INTEIROS, RACIONAIS E IRRACIONAIS

Os números naturais são um conjunto fundamental na Matemática que representa os números inteiros não negativos, começando a partir do número 0 e se estendendo indefinidamente. São simbolizados pelo conjunto N = {0, 1, 2, 3, ...}. Os números naturais são essenciais em várias áreas do conhecimento e têm uma importância central no desenvolvimento das habilidades matemáticas básicas.

De acordo com Leithold (2014), os números naturais desempenham um papel fundamental na contagem, na ordenação e na representação de quantidades discretas. Eles são utilizados em situações cotidianas, como contar objetos, identificar a posição de um elemento em uma sequência ou representar a idade de uma pessoa. Além disso, os números naturais são a base para a construção dos demais conjuntos numéricos, como os números inteiros, racionais, irracionais e reais.

> A compreensão dos números naturais é essencial para o desenvolvimento de habilidades matemáticas mais avançadas. Eles servem como base para a compreensão de conceitos como adição, subtração, multiplicação e divisão, além de possibilitar a exploração de propriedades matemáticas, como a comutatividade, associatividade e distributividade das operações. Os números naturais também são utilizados em áreas como álgebra, análise combinatória, probabilidade e estatística (Lethold, 2014, p. 25).

Por sua importância no ensino e aprendizagem da Matemática, o domínio dos números naturais é essencial. O professor deve fornecer aos alunos experiências práticas e concretas que os auxiliem na compreensão desses números, explorando atividades de contagem, jogos, problemas e situações reais. É fundamental incentivar os estudantes a desenvolverem o pensamento crítico e a capacidade de resolver problemas utilizando os números naturais.

Em conclusão, os números naturais são um conjunto essencial na Matemática, servindo como base para o desenvolvimento de habilidades matemáticas básicas e avançadas. Eles são utilizados na contagem, ordenação e representação de quantidades discretas, além de serem fundamentais para a compreensão de conceitos matemáticos mais complexos. O domínio dos números naturais é crucial para a formação matemática dos alunos e sua aplicação em várias áreas do conhecimento.

No que se refere aos números inteiros, são um conjunto de números que engloba tanto os números positivos quanto os negativos, além do zero. Eles são fundamentais na Matemática e têm uma ampla gama de aplicações em diversas áreas, desde a álgebra até a teoria dos números e a computação. Os números inteiros são representados pelo símbolo $\mathbb{Z}$ e podem ser expressos como -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, e assim por diante.

Segundo Stewart (2015), a importância dos números inteiros reside na sua capacidade de representar quantidades negativas, bem como em sua relação com outras áreas da Matemática. Eles são essenciais na resolução de equações e na manipulação algébrica, permitindo operações como adição, subtração, multiplicação e divisão. O domínio das operações entre os números negativos é essencial, pois na soma e na subtração de números inteiros de sinais diferentes, realizamos a subtração e conservamos o sinal do maior, e quando os sinais forem iguais, realizamos a soma e conservamos o sinal. Já na multiplicação e divisão, é necessário realizarmos o jogo de sinal. O conjunto dos números inteiros possui subconjuntos, como o conjunto dos números naturais, que está contido nos números inteiros, ou o conjunto dos inteiros positivos. Além disso, os números inteiros têm propriedades distintas, como a existência de um oposto para cada número e a propriedade de fechamento das operações de adição e multiplicação.

Ainda de acordo com o autor acima citado, os números inteiros são aplicados em muitos campos do conhecimento. Na física, por exemplo, eles são usados para representar grandezas com direção e sentido, como velocidade e aceleração. Na computação, são utilizados em algoritmos de programação, na representação de números binários e em cálculos de criptografia. Além disso, na teoria dos números, os números inteiros são estudados em profundidade, investigando propriedades como divisibilidade, congruência e números primos.

Em resumo, os números inteiros são fundamentais na Matemática e possuem uma ampla aplicação em diversas áreas. Eles permitem a representação de quantidades negativas, além de serem essenciais para operações algébricas e resolução de equações. Sua importância é destacada por sua relação com outras áreas da Matemática e pelas aplicações práticas em física, computação e teoria dos números.

Os números racionais são um conjunto de números que inclui as frações e os números inteiros, representando quantidades que podem ser expressas como uma razão entre dois inteiros. São simbolizados pelo conjunto Q = {a/b | a, b ∈ ℤ, b ≠ 0}. Os números racionais desempenham um papel fundamental na Matemática, oferecendo uma extensão dos números naturais e possibilitando a representação de quantidades fracionárias.

Lima (2016) explica que os números racionais são utilizados em diversas situações práticas e cotidianas. Eles permitem expressar partes de um todo, como a divisão de uma pizza em fatias ou a distribuição de um lote de terreno entre várias pessoas. Além disso, os números racionais são fundamentais para operações matemáticas como adição, subtração, multiplicação e divisão, bem como para a resolução de equações e a compreensão de proporções.

Ainda segundo o autor supracitado, a importância dos números racionais é evidente em várias áreas da Matemática e em aplicações práticas. Eles são essenciais na geometria, permitindo a representação de pontos em coordenadas racionais e a construção de figuras geométricas complexas. Na física, os números racionais são utilizados para expressar grandezas como velocidade média, densidade e razão entre medidas. Além disso, na economia e nas finanças, eles são usados para calcular juros, taxas de câmbio e percentagens.

> A compreensão dos números racionais é uma etapa crucial na aprendizagem matemática. É importante que os estudantes desenvolvam uma sólida compreensão de frações, decimais e porcentagens, assim como a habilidade de converter entre essas representações. O ensino dos números racionais deve enfatizar a relação entre a representação simbólica e a interpretação do significado das quantidades racionais, bem como promover o uso de estratégias de resolução de problemas que envolvam situações práticas e concretas (Lima, 2016, p. 43).

Em resumo, os números racionais são fundamentais na Matemática, permitindo a representação de quantidades fracionárias e a realização de operações matemáticas. Sua importância é evidente em diversas áreas do conhecimento e em situações práticas do cotidiano. O domínio dos números racionais é essencial para o desenvolvimento de habilidades matemáticas e sua aplicação em várias áreas.

Por fim, sobre os números irracionais, estes são um conjunto de números reais que não podem ser expressos como uma fração, ou seja, não podem ser representados na forma de uma razão entre dois inteiros. Diferentemente dos números racionais, que podem ser expressos como frações, os números irracionais são caracterizados por uma expansão decimal não periódica e infinita. Eles são fundamentais na Matemática e têm uma natureza peculiar que os torna objetos de estudo e investigação.

Segundo Stewart (2015), um exemplo clássico de número irracional é a raiz quadrada de 2 ($\sqrt{2}$). A raiz quadrada de 2 é um número real que não pode ser expresso como uma fração simples, pois sua expansão decimal não se repete e não pode ser exatamente representada por uma razão entre inteiros. Por muito tempo o filósofo Hípaso de Metaponto tentou provar que $\sqrt{2}$ era um número irracional. Porém, Hípaso era participante da escola Pitagórica, escola filosófica que acreditavam que toda geometria poderia ser descrita apenas com números racionais. Dessa maneira, se o que Hípaso falava fosse verdade, tudo que se havia construído sob essa hipótese seria falso. Mesmo assim, Hípaso de Metaponto quebrou a regra de silêncio dos pitagóricos, revelando ao mundo a existência destes novos números. Por fim decidiram expulsá-lo, no entanto há diversos mitos sobre o que realmente aconteceu com Hípaso e não se sabe realmente o que podemos tomar como verdade. Contudo, Hípaso falava a verdade, na medida em que demonstraram, utilizando o Teorema fundamental da Aritmética, a irracionalidade de $\sqrt{2}$, estendendo essa demonstração para mostrar que $\sqrt{p}$ é irracional, para todo número p primo.

Outros exemplos de números irracionais conhecidos são o número π (pi) e o número de Euler (e). A irracionalidade de π foi demonstrada pela primeira vez, ainda no século XVIII, pelo matemático francês Johann Heinrich Lambert. Na demonstração, Lambert (1767) obtendo uma expansão da função tangente por frações contınuas e, a partir daí, ele conseguiu provar um resultado mais geral: “se α e um racional não nulo, então tgα e irracional”. Segue consecutivamente que π e irracional, pois tg(π/4) = 1 ∈ Q. Já na literatura é possível encontra-nos diversas provas da irracionalidade de π. Niven (1947) demonstrou de forma simples a irracionalidade de π usando o calculo elementar. Breusch (1954) provou que π e irracional usando a teoria de séries de potências. Esses números são fundamentais em várias áreas da Matemática, como geometria, análise matemática e cálculo. Distinto do número π, do qual já se tinha conhecimento desde a Antiguidade, o Número de Euler, denotado por e ,e aproximadamente igual a 2, 71828, só veio a ser descoberto na Idade Moderna. De acordo com Maor (1994, p.16), o primeiro reconhecimento explícito do papel do número e na Matemática parece ter sido feito em 1618, na segunda edição da tradução de Edward Wright para a obra Mirifici logarithm orum canonis descriptio¹ [1]de John Napier, o criador, ou melhor, descobridor dos logaritmos.

Segundo Maor (1994, p.26), o aparecimento do Número de Euler estaria ligado diretamente a uma fórmula para o cálculo de juros compostos. Se um capital inicial de R$ 1,00 for investido a uma taxa de juros anual de 100% capitalizados anualmente, ao m do primeiro ano o montante obtido será dado por M = $(1+1)^1$ = 2. Mas caso a capitalização fosse realizada semestralmente, esse valor passaria a ser M =$(1 + \frac{1}{2})^2$ = 2,25. Agora se a capitalização ocorresse a cada trimestre, teríamos M = $(1 + \frac{1}{4})^4 \approx$ 2,44. 4. De maneira geral, fosse realizando a capitalização de n várias vezes ao ano , adquiriríamos M = $(1 + \frac{1}{n})^n$. É esta última expressão que relacionar a Matemática Financeira ao Número de Euler.

Mesmo que o conceito de limite, propriamente dito, só tenha sido desenvolvido posteriormente, a partir da segunda metade do século XVII, por meio dos trabalhos de Newton e Leibniz, é provável que na época de Napier, início desse mesmo século, alguém já tenha se perguntando o que acontece com M quando aumentamos indefinidamente o valor de n. O processo de verificação do comportamento da função que representada o montante à medida que n cresce conduziu os matemáticos ao encontro de e. Consequentemente, é natural pensar que, mesmo aumentando indefinidamente o valor de n, o montante resultará em um número real bem definido, o número Euler.

A importância dos números irracionais reside em sua presença em diversas situações matemáticas e aplicação em diversas áreas do conhecimento. Eles são utilizados em cálculos de áreas, volumes e comprimentos de figuras geométricas complexas. Na física, os números irracionais são encontrados em fenômenos naturais, como as oscilações do pêndulo e as propriedades das ondas. Além disso, eles têm um papel crucial em equações transcendentais e séries infinitas.

Para Stewart (2015), a compreensão dos números irracionais pode ser desafiadora para os estudantes, devido à sua natureza abstrata e à ausência de uma representação exata. No entanto, estratégias pedagógicas eficazes podem auxiliar nesse processo. A utilização de exemplos práticos e visualizações geométricas pode

[1] Em um dos apêndices desta obra, aparece o equivalente da declaração de que $log_{\,e}$ 10 = 2, 302585 (Maor, 1994, p.16).

tornar os números irracionais mais concretos e acessíveis. Através de construções geométricas e aproximações numéricas, é possível estabelecer uma conexão entre os números irracionais e situações do cotidiano, facilitando sua compreensão.

Além disso, recursos tecnológicos, como calculadoras e softwares educacionais, podem ser utilizados para explorar e visualizar propriedades dos números irracionais. Gráficos, simulações e representações interativas podem auxiliar os estudantes a compreender as características e o comportamento desses números.

Dessa forma, os números irracionais são uma parte essencial da Matemática, caracterizados por uma expansão decimal não periódica e infinita. Sua presença e importância são evidentes em diversas áreas da Matemática e aplicações práticas. Embora a compreensão dos números irracionais possa apresentar desafios, estratégias pedagógicas adequadas podem torná-los mais acessíveis e significativos para os estudantes.

2.1 DEMONSTRAÇÃO SOBRE NÚMEROS IRRACIONAIS

Foram os gregos, que no século V a.C., descobriram que os números irracionais são fundamentais na geometria. Os matemáticos gregos verificavam grandezas de uma mesma classe, como dois segmentos de reta, duas áreas ou dois volumes. Aparentemente, os gregos ficaram surpresos ao descobrirem os números irracionais, porque pensaram que, dados dois segmentos quaisquer, como o lado e a diagonal de um quadrado, existiriam sempre inteiros a e b, tais que a razão dos comprimentos dos segmentos fosse $\frac{a}{b}$.

A fim de compreender como demonstrar a irracionalidade de um número, é necessário, em primeiro lugar, compreender o conceito de número irracional. Um número irracional é determinado como um número real que não pode ser expresso como a razão entre dois números inteiros.

Assim, um número irracional é um número real que não pertence ao conjunto dos números racionais.

Stewart (2015) destaca que é importante observar que os números irracionais são definidos por sua exclusão do conjunto dos números racionais. Isso nos direciona para uma abordagem geral na demonstração da irracionalidade de um número, a qual se baseia no uso de demonstrações por absurdo.

Nesse método, parte-se do pressuposto de que o número em questão é racional. Em seguida, supõe-se que ele possa ser expresso como a fração de dois números inteiros. A partir dessa suposição, são realizadas manipulações e argumentações lógicas para chegar a uma contradição. Essa contradição evidencia que a suposição inicial de que o número é racional é falsa, concluindo-se, então, que o número é irracional.

Por algum tempo, $\sqrt{2}$ foi o único número irracional conhecido. Mais tarde, segundo Platão, Teodoro de Cirene, por volta de 425 a.C., mostrou que $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ e $\sqrt{17}$ também são irracionais

Um exemplo clássico de demonstração de um número irracional é a prova de que a raiz quadrada de 2 ($\sqrt{2}$) é irracional. Essa demonstração, atribuída a Pitágoras, demonstra que não é possível expressar $\sqrt{2}$ como uma fração simples. Assumindo o contrário, ou seja, que $\sqrt{2}$ é racional e pode ser escrito na forma de uma fração, prossegue-se com uma série de argumentos e manipulações matemáticas para chegar a uma contradição, evidenciando que $\sqrt{2}$ não pode ser racional.

2.1.1 Teorema

Seja α um número irracional qualquer e η um número racional diferente de zero. Então a adição, subtração, multiplicação e divisão de η e α resultarão em números irracionais. Também $-\alpha$ e α^{-1}são irracionais.

Exemplos: Seja $\alpha = \sqrt{52}$ e $\eta = \frac{2}{3}$ então

$\sqrt{52} + \frac{2}{3}$ é $irracional$,

$\sqrt{52} - \dfrac{2}{3}$ é $irracional$,

$\dfrac{2}{3} - \sqrt{52}$ é $irracional$,

$\dfrac{2\sqrt{52}}{3}$ é $irracional$,

$\dfrac{3\sqrt{52}}{2}$ é $irracional$.

2.1.2 Teorema 02

Sejam a e b inteiros. Se o inteiro z= a.b e tal que $\sqrt{z} = \sqrt{a.b}$ é irracional , então $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ é irracional também .

Demonstração: Consideramos que $\rho = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ seja um número racional, teremos que:

$$\rho = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\rho^2 = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\,\right)^2$$

$$\rho^2 = a + 2.\sqrt{a}.\sqrt{b} + b$$

$$p^2 = a + 2\sqrt{a.b} + b$$

Mas, como os números racionais são fechados em relação à adição, subtração e divisão pelo teorema citado acima, e como ρ, a, b e 2 são racionais teríamos que $\sqrt{a.b}$ são racional. O que é uma contradição.

Exemplo :

$\sqrt{21} = \sqrt{7.3}$ é um número irracional logo $(\sqrt{7} + \sqrt{3})$ também é um número irracional.

2.2 DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

O desenvolvimento histórico dos números irracionais é uma jornada fascinante que remonta aos primórdios da matemática. Desde os primeiros registros de civilizações antigas até as descobertas mais recentes, esse tema tem sido uma das principais áreas de exploração matemática. Neste texto, faremos uma retrospectiva histórica do desenvolvimento dos números irracionais, abrangendo diferentes períodos e avanços matemáticos.

A história dos números irracionais tem suas raízes na antiguidade, com a civilização babilônica e a egípcia, que já possuíam uma compreensão rudimentar das frações. No entanto, foi com os antigos gregos que a ideia de números irracionais começou a se desenvolver. O matemático e filósofo Pitágoras e seus seguidores fizeram importantes descobertas nesse campo. Eles acreditavam que todos os números podiam ser expressos como frações, mas ao tentarem calcular o comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1, perceberam que a raiz quadrada de 2 não poderia ser expressa como uma fração. Esse foi um momento crucial no desenvolvimento dos números irracionais.

"A descoberta da irracionalidade de $\sqrt{2}$ é um marco histórico na matemática grega antiga", afirma Smith (2003, p. 35). Pitágoras e seus seguidores ficaram perplexos ao perceber que um segmento de comprimento invariável poderia existir sem uma razão entre números inteiros. Esse conceito desafiou a visão matemática da época e abriu caminho para novas investigações.

Apesar desse avanço, o conceito de números irracionais permaneceu controverso e pouco aceito durante a antiguidade e a Idade Média. Foi apenas no século XVI que o matemático italiano Rafael Bombelli começou a reconhecer os números irracionais como quantidades legítimas. Em sua obra "L'Algebra", publicada em 1572, Bombelli demonstrou que as raízes quadradas de números negativos tinham uma interpretação geométrica válida e podiam ser manipuladas matematicamente.

No entanto, o reconhecimento mais amplo dos números irracionais só veio no século XIX, com o desenvolvimento da análise matemática. Matemáticos como Karl Weierstrass e Georg Cantor aprofundaram o entendimento dos números irracionais e sua relação com os números racionais. Cantor, em particular, desenvolveu a teoria dos conjuntos e provou que há uma infinidade de números irracionais entre qualquer par de números racionais.

O século XX trouxe novas perspectivas sobre os números irracionais com o advento da teoria dos conjuntos e da teoria da medida. O matemático francês Benoit Mandelbrot expandiu o estudo dos números irracionais para incluir objetos geométricos complexos, como os conjuntos fractais, que exibem padrões infinitos e auto similares.

Ao longo da história, o desenvolvimento dos números irracionais tem sido fundamental para a evolução da matemática. Desde a perplexidade inicial dos gregos antigos até os avanços modernos na teoria dos conjuntos e fractais, os números irracionais continuam a intrigar e inspirar gerações de matemáticos e estudiosos.

2.3 DESAFIOS NO ENSINO DE NÚMEROS IRRACIONAIS

O ensino de números irracionais apresenta desafios significativos devido à sua natureza abstrata e complexa. Os números irracionais são uma classe especial de números que não podem ser expressos como frações e possuem infinitos dígitos após a vírgula em sua representação decimal. Essa característica única torna seu ensino uma tarefa desafiadora para educadores. Neste texto, abordaremos os principais desafios enfrentados no ensino de números irracionais e como superá-los para facilitar a compreensão dos alunos.

Um dos primeiros desafios no ensino de números irracionais é a conceituação. A ideia de um número cuja representação decimal não é periódica e não pode ser expressa como uma fração pode ser confusa para os alunos. Segundo Fonseca e Ribeiro (2018, p. 62), "os números irracionais são frequentemente vistos como algo estranho, difícil de compreender". Os estudantes podem encontrar dificuldades em visualizar e internalizar a existência desses números.

Outro desafio é a compreensão da relação entre os números irracionais e os números racionais. Os números racionais podem ser expressos como frações e possuem representações decimais periódicas ou finitas. É importante mostrar aos alunos que os números irracionais são um complemento dos números racionais, formando um conjunto completo de números reais. De acordo com Borba e Penteado (2015, p. 120), "é fundamental ressaltar que os números irracionais e racionais são complementares e, juntos, preenchem a reta numérica".

Além disso, a representação geométrica dos números irracionais pode ser um desafio adicional. Apresentar aos alunos que números como a raiz quadrada de 2 ou o número pi (π) estão relacionados a comprimentos de segmentos ou circunferências pode ajudá-los a visualizar e conectar esses conceitos com situações reais. Segundo Rezende (2016, p. 72), "a representação geométrica dos números irracionais é uma estratégia eficiente para tornar o conteúdo mais concreto".

A falta de contexto aplicado também pode dificultar a compreensão dos números irracionais. Muitas vezes, o ensino deles ocorre isolado de outros conceitos matemáticos, tornando-o menos significativo para os alunos. Incorporar situações do mundo real, como cálculos de medidas, círculos e triângulos em problemas práticos, pode tornar o aprendizado mais envolvente e útil para os alunos (Nascimento *et al*., 2020, p. 149).

Outro desafio a ser considerado é o medo dos números irracionais que alguns estudantes desenvolvem ao longo do processo de aprendizagem. Para alguns, a noção de números que não podem ser escritos como frações pode criar ansiedade matemática. De acordo com Carvalho e Passos (2019, p. 85), "a abordagem pedagógica deve ser cuidadosa para não desenvolver bloqueios e receios relacionados aos números irracionais".

Para superar esses desafios, é fundamental que os educadores adotem abordagens pedagógicas eficazes. O uso de tecnologias educacionais, como aplicativos interativos e softwares de simulação, pode tornar o ensino dos números irracionais mais dinâmico e atrativo (Fonseca e Ribeiro, 2018, p. 63). Além disso, a contextualização e a interdisciplinaridade são fundamentais para mostrar aos alunos a relevância dos números irracionais em diversos campos do conhecimento (Borba e Penteado, 2015, p. 122).

Em suma, o ensino de números irracionais apresenta desafios, mas com abordagens pedagógicas adequadas, é possível superá-los. Ao conceituar, relacionar com os números racionais, utilizar representações geométricas, aplicar em situações reais e tratar possíveis bloqueios emocionais, os educadores podem promover uma compreensão mais sólida e significativa dos números irracionais para seus alunos.

A visão dos professores em relação ao ensino de números irracionais é um fator crucial para o sucesso da aprendizagem dos alunos nesse tema complexo da matemática. O papel dos educadores na abordagem dos números irracionais vai além da simples transmissão de conceitos, envolvendo a compreensão das dificuldades dos estudantes e a adoção de estratégias pedagógicas eficazes. Neste texto, vamos explorar a visão dos professores no ensino de números irracionais e como ela influencia o processo educacional.

Em muitos casos, os professores enfrentam desafios ao ensinar números irracionais. Eles podem sentir dificuldades em abordar esse conteúdo abstrato e garantir que os alunos o compreendam de maneira significativa. De acordo com Ramos e Oliveira (2020, p. 48), "alguns professores demonstram insegurança ao tratar dos números irracionais em sala de aula". Essa insegurança pode afetar a forma como os conteúdos são apresentados, prejudicando o aprendizado dos estudantes.

Uma das principais preocupações dos professores é a falta de recursos didáticos adequados para ensinar números irracionais. A limitação de materiais de apoio, como livros didáticos atualizados e atividades práticas, pode dificultar o desenvolvimento de aulas mais dinâmicas e envolventes. Segundo Silva e Santos (2018, p. 92), "a escassez de materiais e recursos que explorem os números irracionais é um desafio enfrentado por muitos educadores".

Além disso, a visão dos professores sobre a relevância dos números irracionais no cotidiano dos alunos pode influenciar sua abordagem em sala de aula. Muitos estudantes questionam a utilidade desses números fora do contexto matemático. Nesse sentido, cabe ao professor demonstrar como os números irracionais estão presentes em diversas situações práticas, como em medidas precisas e cálculos de áreas de figuras geométricas (Silva e Santos, 2018, p. 94).

É essencial que os professores percebam que o ensino de números irracionais não se trata apenas de transmitir conhecimento, mas também de ajudar os alunos a superar possíveis bloqueios emocionais em relação ao tema. Alguns estudantes podem desenvolver ansiedade ou medo em relação à matemática e, em particular, aos números irracionais. Conforme destacam Costa e Carvalho (2019, p. 76), "a abordagem pedagógica deve estar atenta para evitar a criação de bloqueios e receios relacionados aos números irracionais".

A formação contínua dos professores é um aspecto importante para aprimorar suas visões e práticas no ensino de números irracionais. O acesso a cursos, oficinas e materiais de atualização pode capacitar os educadores a desenvolverem abordagens mais eficazes e inovadoras. De acordo com Farias e Lima (2021, p. 110), "a formação continuada dos professores é fundamental para melhorar a didática e a compreensão do conteúdo pelos alunos".

Em resumo, a visão dos professores no ensino de números irracionais desempenha um papel central na aprendizagem dos alunos. Superar inseguranças, buscar recursos didáticos adequados, contextualizar o conteúdo, lidar com bloqueios emocionais e investir em formação continuada são ações fundamentais para aprimorar o ensino desse tema desafiador e essencial da matemática.

3 TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

A transposição didática, um conceito fundamental na área da Educação Matemática, refere-se ao complexo processo de traduzir conteúdos matemáticos, muitas vezes abstratos e teóricos, em formas mais acessíveis e compreensíveis para os alunos. O termo foi introduzido por Yves Chevallard, um renomado pesquisador nessa área, que destacou a necessidade de transformar o conhecimento matemático em algo que faça sentido no contexto da sala de aula (Chevallard, 1985).

Essa transposição envolve uma série de adaptações e transformações. A informação matemática que inicialmente reside em um nível mais avançado de complexidade, muitas vezes destinada a profissionais da área, precisa ser remodelada para se adequar à compreensão dos estudantes, levando em consideração suas experiências anteriores, níveis de desenvolvimento cognitivo e a cultura da sala de aula (Artigue, 2002).

No entanto, a transposição didática não é uma tarefa simples. Ela está sujeita a uma série de desafios e decisões complexas. Os professores desempenham um papel crucial nesse processo, pois são eles que decidem quais aspectos do conhecimento matemático serão enfatizados, que exemplos serão utilizados e que estratégias pedagógicas serão aplicadas (Remillard, 2005). Suas crenças, valores e visões sobre o ensino e aprendizagem também influenciam como a transposição é realizada (Drijvers *et al*., 2010).

Os materiais didáticos também desempenham um papel vital na transposição didática. Livros, apostilas e recursos digitais são desenvolvidos com o intuito de facilitar a compreensão dos conceitos matemáticos, muitas vezes incorporando abordagens pedagógicas específicas. No entanto, esses materiais podem tanto apoiar quanto limitar a transposição, dependendo de como são projetados e implementados (Gueudet e Trouche, 2009).

Além disso, a transposição didática é afetada pelo contexto educacional mais amplo. Políticas curriculares, exames padronizados e as próprias estruturas das instituições de ensino podem influenciar as decisões dos professores sobre como transpor o conhecimento matemático para seus alunos (Ball, 2003).

Em resumo, a transposição didática é um processo essencial para tornar a matemática acessível e significativa para os estudantes. Ela envolve a tradução do conhecimento matemático avançado em algo que possa ser compreendido e internalizado pelos alunos. Professores, materiais didáticos, crenças pedagógicas e o contexto educacional como um todo desempenham papéis interconectados nesse processo complexo. Compreender e aprimorar a transposição didática é fundamental para melhorar o ensino e aprendizagem da matemática nas salas de aula.

3.1 PROCESSO DE TRANSPOSIÇÃO: DA TEORIA À SALA DE AULA

O processo de transposição didática, que se refere à transformação do conhecimento matemático de seu estado original em um formato mais acessível e compreensível para os alunos, é um passo crucial na prática educacional (Chevallard, 1985). Do ponto de vista teórico, a transposição engloba a análise crítica das estruturas conceituais e abstrações matemáticas, identificando como esses elementos podem ser adaptados para uma apresentação didática eficaz (Artigue, 2002). No entanto, o desafio reside na transição bem-sucedida da teoria à prática na sala de aula.

A transposição didática envolve decisões complexas por parte dos professores. Ao adaptar o conteúdo matemático, eles devem considerar não apenas a simplificação dos conceitos, mas também a seleção de exemplos relevantes e a escolha de estratégias de ensino adequadas (Remillard, 2005). A aplicação eficaz da transposição requer uma compreensão profunda do conhecimento matemático, bem como uma compreensão das perspectivas e necessidades dos alunos (Leinhardt, 1990).

A implementação bem-sucedida da transposição didática é influenciada pelas crenças e experiências do professor. As visões individuais sobre ensino, aprendizagem e o propósito da educação matemática moldam como o conhecimento é transformado e apresentado (Ball; Thames e Phelps, 2008). Isso sugere que a transposição é um processo que não ocorre em isolamento, mas está intrinsecamente ligado às atitudes e contextos pessoais do professor.

Para efetuar a transposição, os professores também podem recorrer aos materiais didáticos disponíveis. Livros, recursos online e materiais de ensino desempenham um papel fundamental no processo, pois podem oferecer diretrizes e abordagens que facilitam a apresentação do conteúdo aos alunos (Gueudet e Trouche, 2009). No entanto, é importante reconhecer que os materiais também podem conter preconceitos e interpretações que precisam ser considerados criticamente pelo professor.

A transposição didática não é um processo estático; ela deve ser adaptada de acordo com as mudanças no ambiente educacional e nas necessidades dos alunos. À medida que novas tecnologias emergem e as abordagens pedagógicas evoluem, os professores são desafiados a reavaliar constantemente suas práticas de transposição (Drijvers *et al*., 2010). Isso ressalta a importância de uma formação contínua e reflexiva para os educadores.

Assim, o processo de transposição didática envolve a tradução do conhecimento matemático complexo em uma forma acessível para os alunos. Isso requer uma compreensão profunda do conteúdo, bem como das perspectivas dos alunos e do contexto educacional. A transposição é influenciada pelas crenças pessoais do professor e pode ser facilitada ou limitada pelos materiais didáticos disponíveis. Além disso, é um processo dinâmico que exige adaptação contínua para atender às mudanças nas práticas pedagógicas e nas demandas educacionais.

3.2 FATORES QUE INFLUENCIAM A TRANSPOSIÇÃO

A transposição didática, processo fundamental na Educação Matemática, é influenciada por uma série de fatores complexos que vão desde as características individuais dos professores até o contexto mais amplo do ambiente educacional. Estes fatores têm um impacto direto sobre como o conhecimento matemático é traduzido do nível teórico para o ambiente da sala de aula (Chevallard, 1985).

Os professores desempenham um papel central no processo de transposição. Suas próprias crenças, conhecimentos e experiências em relação à matemática e à educação moldam a forma como abordam a tarefa de tornar o conteúdo matemático acessível aos alunos (Remillard, 2005). Essas crenças podem ser tanto facilitadoras quanto limitadoras, influenciando as escolhas pedagógicas, os exemplos utilizados e as estratégias de ensino (Ball; Thames e Phelps, 2008).

As características dos alunos também são fatores significativos na transposição didática. A compreensão da diversidade de níveis de conhecimento, estilos de aprendizagem e formas de pensar dos alunos é essencial para adaptar o conteúdo matemático de maneira apropriada (Leinhardt, 1990). A necessidade de ajustar a transposição para atender a essa diversidade é um desafio constante para os educadores.

O contexto escolar e curricular também exerce influência sobre a transposição. As políticas educacionais, diretrizes curriculares e exames padronizados podem criar restrições ou incentivos para o modo como o conteúdo é abordado (Ball, 2003). Além disso, o ambiente da sala de aula, incluindo o tamanho da turma, recursos disponíveis e dinâmica social, afeta a implementação prática da transposição (Gueudet e Trouche, 2009).

Os materiais didáticos, sejam eles livros-texto, recursos online ou outros, também têm um papel crucial na transposição. Esses materiais podem fornecer estruturas e orientações para os professores, influenciando as escolhas sobre como apresentar o conteúdo aos alunos (Artigue, 2002). No entanto, é importante reconhecer que os materiais didáticos nem sempre são neutros e podem conter viéses culturais ou interpretações específicas que precisam ser consideradas criticamente pelo professor.

O processo de transposição é uma interseção complexa desses fatores, e uma abordagem eficaz requer uma análise crítica e uma tomada de decisões cuidadosa. Os educadores devem estar cientes das influências em jogo e buscar maneiras de equilibrar esses fatores para melhorar a qualidade do ensino da matemática (Drijvers *et al*., 2010).

Em última análise, a compreensão dos fatores que influenciam a transposição didática é crucial para aprimorar a prática educacional. Essa compreensão permite que os professores ajustem suas abordagens de ensino, reconhecendo a interconexão entre crenças, características dos alunos, contextos escolares e materiais didáticos. Dessa forma, os educadores podem facilitar a transposição bem-sucedida do conhecimento matemático da teoria para a sala de aula.

3.3 CONTEXTO ESCOLAR E CURRICULAR

O contexto escolar e curricular desempenha um papel crucial na transposição didática, influenciando significativamente a maneira como o conhecimento matemático é apresentado e assimilado pelos alunos. As políticas educacionais, as diretrizes curriculares e outros aspectos do ambiente escolar moldam tanto as possibilidades quanto as restrições para os professores na hora de adaptar o conteúdo (Ball, 2003).

As políticas educacionais estabelecem o quadro geral dentro do qual a transposição ocorre. Elas definem os objetivos gerais da educação matemática e podem afetar as escolhas sobre quais tópicos devem ser enfatizados e como devem ser abordados (Remillard, 2005). Essas políticas podem ser influenciadas por uma variedade de fatores, incluindo tendências educacionais atuais, necessidades econômicas e demandas da sociedade.

As diretrizes curriculares, por sua vez, especificam os conteúdos, competências e habilidades que os alunos devem adquirir. Essas diretrizes muitas vezes definem um escopo e sequência específicos, delineando quais conceitos devem ser ensinados em cada série ou nível de ensino. Os professores podem sentir pressão para se alinhar estritamente a essas diretrizes, o que pode influenciar as escolhas de transposição (Gueudet e Trouche, 2009).

Além disso, os exames padronizados têm um impacto significativo na transposição. Os resultados desses exames muitas vezes são usados para avaliar a eficácia do ensino e da aprendizagem. Isso pode levar os professores a se concentrarem em preparar os alunos para esses exames, moldando a forma como os conteúdos são apresentados e abordados na sala de aula (Ball; Thames e Phelps, 2008).

O ambiente escolar também desempenha um papel na transposição. A cultura da escola, as práticas de liderança e a disponibilidade de recursos educacionais podem afetar as decisões dos professores sobre como adaptar o conteúdo. Além disso, as dinâmicas sociais dentro da escola, como a diversidade dos alunos e as relações interpessoais, podem influenciar a forma como a transposição é realizada para atender às necessidades individuais (Drijvers *et al*., 2010).

Nesse cenário, os professores enfrentam o desafio de encontrar um equilíbrio entre as demandas externas e a necessidade de adaptar o conteúdo para os alunos de maneira significativa. Eles podem sentir-se pressionados a seguir as políticas e diretrizes, mas também devem atender às necessidades específicas de aprendizagem de seus alunos.

Em resumo, o contexto escolar e curricular exerce uma influência profunda na transposição didática. Políticas educacionais, diretrizes curriculares, exames padronizados e a cultura escolar em geral afetam as escolhas que os professores fazem ao adaptar o conteúdo matemático. Essa interação complexa entre fatores externos e práticas pedagógicas molda o processo de transposição, destacando a importância de uma abordagem reflexiva e adaptativa por parte dos educadores.

4 DESAFIOS E ESTRATÉGIAS PARA A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA DE NÚMEROS IRRACIONAIS

A transposição didática de números irracionais é um desafio significativo no ensino da matemática, pois esses números possuem características únicas que os diferenciam dos números racionais, tornando seu ensino mais complexo e exigindo estratégias pedagógicas eficazes para promover a compreensão dos alunos. Neste texto, discutiremos os desafios envolvidos na transposição didática de números irracionais e exploraremos algumas estratégias que podem ser adotadas pelos educadores para tornar esse processo mais efetivo.

Um dos principais desafios ao trabalhar com números irracionais é que sua representação decimal é infinita e não periódica. Isso pode levar os estudantes a terem dificuldades em compreender que esses números não têm um "fim" definido e que seus dígitos continuam indefinidamente. Além disso, a propriedade de densidade dos números irracionais, ou seja, a existência de números irracionais entre quaisquer dois números racionais, também pode ser uma fonte de confusão para os alunos (Perrenoud, 1990).

Outro desafio é superar a ideia preconcebida de que a matemática é uma ciência estática, com resultados definidos de forma absoluta. Ao introduzir números irracionais, é fundamental ajudar os alunos a entender que os números não são apenas descobertas matemáticas feitas por gênios do passado, mas também são construções racionais, resultantes de uma evolução histórica do pensamento matemático (Tall, 2013).

Para superar esses desafios, os educadores podem adotar várias estratégias pedagógicas. Uma abordagem é utilizar representações visuais e gráficas para auxiliar na compreensão dos números irracionais.

Por exemplo, ao trabalhar com a raiz quadrada de 2, pode-se apresentar um quadrado com lados medindo 1 unidade e destacar que a diagonal desse quadrado é um número irracional, ou seja, a raiz quadrada de 2. Essa representação geométrica pode tornar o conceito mais concreto e visualmente compreensível para os alunos (Carvalho, 2006).

Além disso, é importante estabelecer conexões entre os números irracionais e situações do cotidiano dos alunos. Ao demonstrar como a constante π aparece em cálculos de circunferências ou a relação entre a raiz quadrada de 2 e as medidas dos lados de um triângulo retângulo, os alunos podem perceber a relevância dos números irracionais em contextos práticos, o que pode aumentar sua motivação e interesse em aprender sobre esses números (Nascimento, 2015).

A contextualização histórica também é uma estratégia valiosa para promover a transposição didática de números irracionais. Ao apresentar a história da descoberta de números como π e $\sqrt{2}$, os alunos podem compreender que esses números foram desenvolvidos ao longo do tempo como respostas para desafios matemáticos específicos. Essa abordagem pode humanizar a matemática, mostrando que ela é fruto da curiosidade humana e da necessidade de compreender o mundo ao nosso redor (Santos, 2012).

A interdisciplinaridade é outra estratégia útil na transposição didática de números irracionais. Ao integrar conceitos matemáticos com outras disciplinas, como física, geometria ou história, os alunos podem perceber as conexões entre diferentes áreas do conhecimento e a importância dos números irracionais em várias aplicações. Essa abordagem pode tornar o ensino da matemática mais significativo e relevante para os estudantes (Gouveia *et al*., 2020).

Por fim, a prática de resolução de problemas desafiadores envolvendo números irracionais pode ser uma estratégia eficaz para aprofundar a compreensão dos alunos e promover sua capacidade de aplicar conceitos matemáticos em situações do mundo real.

Problemas que envolvem medidas imprecisas, cálculos de áreas ou volumes e questões relacionadas a proporções podem ser usados para estimular o pensamento crítico e a resolução de problemas envolvendo números irracionais (Kilpatrick *et al*., 2001).

Em conclusão, a transposição didática de números irracionais é um desafio pedagógico que requer estratégias eficazes para tornar esses conceitos matemáticos complexos acessíveis e compreensíveis para os alunos. Utilizando representações visuais, conexões com situações cotidianas, contextualização histórica, interdisciplinaridade e resolução de problemas desafiadores, os educadores podem ajudar os estudantes a construir um conhecimento sólido sobre os números irracionais, fortalecendo sua base matemática e desenvolvendo suas habilidades de pensamento crítico e aplicação prática.

4.1 REPRESENTAÇÕES VISUAIS E GRÁFICAS

As representações visuais e gráficas desempenham um papel fundamental na Educação Matemática, permitindo que os alunos compreendam conceitos abstratos por meio de imagens concretas e intuitivas. Essas representações são especialmente valiosas ao lidar com tópicos complexos, como números irracionais, que podem ser desafiadores de se visualizar apenas através de descrições verbais ou símbolos matemáticos (Duval, 2006).

A visualização de números irracionais muitas vezes envolve a representação de grandezas contínuas, como as coordenadas de pontos em uma reta numérica ou as dimensões de figuras geométricas. A reta numérica, por exemplo, é uma representação visual eficaz para mostrar a posição relativa de números irracionais em relação aos números racionais, destacando a densidade e a ordem desses números (Lopes, 2009).

Além disso, gráficos podem ser poderosas ferramentas de representação visual. Plotar números irracionais em gráficos cartesianos pode ajudar os alunos a explorar relações entre esses números e as operações matemáticas, como a adição ou multiplicação de números irracionais. Os gráficos também podem ser usados para ilustrar a natureza não-periódica das representações decimais de números irracionais (Hanna e Sidoli, 2007).

A visualização também pode ser estendida a situações do mundo real que envolvem números irracionais. Por exemplo, a aplicação de números irracionais na medição de grandezas físicas, como o cálculo da diagonal de um quadrado, pode ser representada visualmente para mostrar como esses números surgem naturalmente em contextos concretos (Gueudet e Trouche, 2009).

No entanto, é importante reconhecer que a visualização de números irracionais também apresenta desafios. A representação de números com infinitas casas decimais em gráficos ou retas numéricas pode ser limitada pelo espaço físico disponível. Além disso, algumas representações visuais podem ser aproximativas, o que pode introduzir a ideia de que números irracionais são "aproximados" ou "não reais", o que não é o caso (Duval, 2006).

Apesar desses desafios, a incorporação de representações visuais e gráficas pode enriquecer a compreensão dos alunos sobre números irracionais. Essas representações fornecem uma maneira concreta e tangível de explorar conceitos abstratos, facilitando a construção de significado matemático. No entanto, é importante integrar essas representações com outras abordagens, como discussões verbais e manipulações simbólicas, para fornecer uma compreensão abrangente dos números Irracionais (Tall e Vinner, 1981).

Exemplos e Casos

Número Irracional $\sqrt{2}$ na Reta Numérica: Na Reta Numérica, o número irracional $\sqrt{2}$ está localizado entre os números inteiros 1 e 2. A posição exata do $\sqrt{2}$ é determinada por cálculos matemáticos, mas na Reta Numérica é simplesmente uma marcação que indica a sua posição. Esta é uma demonstração prática de como os números irracionais são integrados à Reta Numérica.

Uso da Reta Numérica para Descrever π (pi): O número pi (π) pode ser representado na Reta Numérica, mesmo sendo um número irracional. A posição exata de π na Reta Numérica não pode ser marcada, pois a sequência de dígitos de π é infinita e não periódica. No entanto, pode-se identificar um segmento da Reta Numérica onde π se encontra, demonstrando que mesmo números de natureza irracional podem ser concebidos dentro do sistema dos números reais.

Operações na Reta Numérica: A Reta Numérica não é apenas uma ferramenta de representação, mas também permite a execução de operações matemáticas. Por exemplo, a adição de dois números pode ser visualizada desenhando uma flecha da posição do primeiro número para a posição do segundo número e, em seguida, desenhando uma flecha da posição final até uma distância equivalente ao terceiro número. A Reta Numérica fornece um meio visual de entender a adição, subtração e outras operações matemáticas.

Dessa forma, as representações visuais e gráficas desempenham um papel vital na Educação Matemática ao lidar com conceitos complexos, como números irracionais. Através de retas numéricas, gráficos cartesianos e conexões com situações do mundo real, os alunos podem desenvolver uma compreensão mais profunda e intuitiva desses números. No entanto, é importante considerar os desafios e limitações das representações visuais, buscando uma abordagem equilibrada que integre múltiplas perspectivas para uma compreensão completa.

4.2 CONEXÕES COM SITUAÇÕES COTIDIANAS

Estabelecer conexões entre conceitos matemáticos e situações cotidianas é uma estratégia pedagógica poderosa que visa tornar o aprendizado mais significativo e relevante para os alunos. Ao aplicar essa abordagem ao ensino de matemática, incluindo tópicos complexos como números irracionais, os educadores podem facilitar uma compreensão mais profunda e intuitiva dos conceitos (Lave, 1988).

A utilização de situações cotidianas como contextos para o ensino de números irracionais ajuda os alunos a visualizar como esses números estão presentes em suas vidas diárias. Ao relacionar conceitos abstratos a situações práticas, os alunos podem perceber a utilidade e a relevância desses conceitos, o que pode aumentar seu engajamento e motivação para aprender (Lave, 1988).

Por exemplo, ao ensinar sobre a raiz quadrada de números irracionais, os professores podem explorar situações que envolvam medidas reais, como a determinação do comprimento de uma diagonal em um quadrado. Os alunos podem identificar a aplicação direta dessa operação em contextos de construção ou design, tornando o conceito de números irracionais mais concreto (Ernest, 1989).

Além disso, os números irracionais podem ser abordados em relação a questões de comparação e estimativa. Por exemplo, discutir a relação entre a medida de um lado de um quadrado e sua diagonal pode ilustrar como os números irracionais se encaixam em comparação com os números racionais familiares. Situações envolvendo medidas precisas, como a distância entre dois pontos em uma linha reta, podem exemplificar a presença de números irracionais na prática (Hiebert e Lefevre, 1986).

No entanto, é importante abordar essas conexões de maneira cuidadosa. As situações cotidianas devem ser escolhidas de forma apropriada para o nível de desenvolvimento dos alunos e para os objetivos de aprendizado. Além disso, é fundamental enfatizar que a aplicação das matemáticas em situações cotidianas nem sempre resulta em números inteiros ou racionais, destacando a importância dos números irracionais como parte do conjunto dos números reais (Lave, 1988).

Em resumo, a estratégia de conectar conceitos matemáticos, como números irracionais, com situações cotidianas é uma abordagem eficaz para tornar o aprendizado mais relevante e significativo para os alunos. Ao aplicar conceitos abstratos em contextos práticos e reais, os alunos podem entender a utilidade e a aplicabilidade desses conceitos, aumentando sua motivação e compreensão da matemática.

4.3 ABORDAGENS INTERDISCIPLINARES

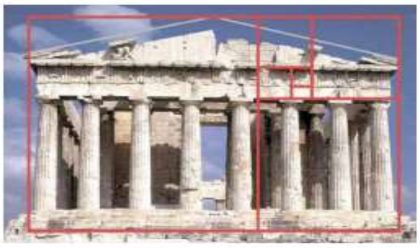
A abordagem interdisciplinar na educação é uma estratégia que busca integrar diferentes disciplinas acadêmicas, como matemática, ciências, história e outras, a fim de enriquecer a compreensão dos alunos sobre um determinado tópico e promover uma visão mais abrangente e contextualizada do conhecimento (Jacobs, 1989). A adoção dessa abordagem no ensino de matemática, incluindo conceitos complexos como números irracionais, pode oferecer uma oportunidade única de explorar conexões entre diferentes áreas do conhecimento.

Ao introduzir os números irracionais de uma perspectiva interdisciplinar, os educadores podem enfatizar a presença desses números não apenas na matemática, mas também em outras áreas. Por exemplo, os números irracionais podem ser explorados em contextos históricos, como a descoberta de $\sqrt{2}$ pelos antigos gregos, ou em contextos científicos, como a utilização de π (pi) em cálculos geométricos e físicos (Stake, 2006).

A conexão com a arte também é uma abordagem interdisciplinar valiosa para ensinar números irracionais. O uso de proporções áureas, que envolvem números irracionais, na arquitetura, na pintura e em outras formas de expressão artística, pode ilustrar como esses números estão inseridos em diversos campos criativos (Dusen, 2009). Isso não apenas torna os números irracionais mais tangíveis, mas também demonstra como a matemática está entrelaçada com a cultura humana.

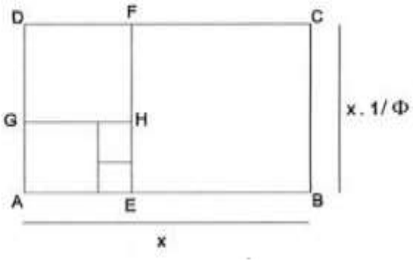
A Proporção Áurea, estudada pelos Gregos num contexto geométrico, aparece em muitas de suas construções como base representada pela letra grega ϕ (Phi) que é obtido pela proporção $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618034...$ A designação adotada para este número é a inicial do nome do arquiteto e escultor Fídias, Phi. Segundo Marques (2013, p. 22), desde a Antiguidade já era notável a utilização da Proporção Áurea. O Parthenon Grego (Figura 1), por exemplo, é uma construção que contém a Proporção Áurea presente no retângulo que tem a fachada (largura /altura) com o intuito de obter uma obra bela e harmoniosa (Landim, 2014). Esse retângulo chama- se Retângulo Áureo (Figura 2).

Figura 1 - Parthenon Grego



Fonte: http://www.matematicaefacil.com.br.Acesso em: 30.out.2023.

Figura 2 - Retângulo Áureo



Fonte: http://www.mat.uc.pt. Acesso em: 30.out.2023.

Conforme Sousa Neto (2013), Retângulo Áureoé um retângulo ABCD dado que suprimir um quadrado de lado AD, como por exemplo, ADFE, o retângulorestante, CBEF, será semelhante ao retângulo original. Já que o retângulo original tem Proporções Áureas, é possível repetir esta operação de suprimirquadrados infinitamente em que sempre encontrará retângulos semelhantes, mantendo a Proporção Áurea em cada um deles.

Além disso, a biologia e a natureza podem ser exploradas como um contexto interdisciplinar para o ensino de números irracionais. Ao estudar padrões de crescimento em seres vivos, como a disposição de folhas em uma planta ou a estrutura de conchas de moluscos, os alunos podem encontrar relações com números irracionais, como o número de ouro (φ), destacando a presença desses números em fenômenos naturais (Barbeau, 2000).

No entanto, a implementação bem-sucedida de abordagens interdisciplinares requer colaboração entre os educadores de diferentes disciplinas. É importante que os professores compartilhem conhecimentos, planos de aula e objetivos para garantir que as conexões entre as disciplinas sejam relevantes e significativas para os alunos (Hixson e Ravitch, 2013).

Por fim, a abordagem interdisciplinar oferece uma maneira rica e envolvente de ensinar números irracionais, permitindo que os alunos explorem conexões entre a matemática e outras disciplinas. Ao relacionar os números irracionais com história, ciências, arte e natureza, os educadores podem fornecer uma compreensão mais ampla e contextualizada desses números complexos. No entanto, é essencial que os educadores colaborem e coordenem seus esforços para garantir que as abordagens interdisciplinares sejam bem integradas e enriquecedoras para os alunos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A transposição didática dos números irracionais representa um campo fundamental no ensino da Matemática, pois esses números reais têm características únicas que os distinguem dos números racionais, que podem ser expressos como frações simples. Essa distinção é crucial para compreender como os números irracionais são abordados em sala de aula.

No âmbito da Matemática, os números irracionais, como a raiz quadrada de 2 ($\sqrt{2}$), o número π (pi) e o número de Euler (e), são conceitos fundamentais que permeiam muitos aspectos da disciplina. Eles são a base para a geometria, cálculo, análise matemática e muito mais. Além disso, têm aplicações práticas em áreas como física, engenharia, economia e ciência da computação. Portanto, compreender os números irracionais é essencial para uma educação matemática sólida.

O desafio da transposição didática reside na abstração inerente dos números irracionais. Ao contrário dos números racionais, que podem ser representados facilmente como frações ou números decimais periódicos, os números irracionais não possuem uma representação exata e podem ser infinitamente não periódicos. Isso cria uma barreira cognitiva para os alunos, que muitas vezes têm dificuldade em conceber números que não podem ser expressos de maneira precisa.

Uma das estratégias mais eficazes para superar essa barreira é o uso de exemplos práticos e visualizações geométricas. Por exemplo, ao ensinar a raiz quadrada de 2 ($\sqrt{2}$), os educadores podem recorrer ao famoso "quadrado de lado 1". Mostrar como a diagonal desse quadrado é igual a $\sqrt{2}$ é uma demonstração visual poderosa que ajuda os alunos a conectar conceitos abstratos à realidade tangível.

No entanto, a transposição didática não se trata apenas de tornar os números irracionais compreensíveis, mas também de fazê-los relevantes para os alunos. É importante estabelecer conexões com situações cotidianas e demonstrar como esses números estão presentes em problemas do mundo real. Isso não apenas aumenta o interesse dos alunos, mas também ajuda a contextualizar o aprendizado, tornando-o mais significativo.

Além disso, a abordagem interdisciplinar pode ser uma ferramenta poderosa na transposição didática dos números irracionais. Mostrar como esses números se relacionam com outras disciplinas, como a física ou a arte, pode iluminar a sua importância e aplicabilidade em diferentes contextos.

No entanto, a transposição didática dos números irracionais não é um processo unidirecional, mas sim um diálogo constante entre o conhecimento matemático e a pedagogia. É um desafio em constante evolução que requer a adaptação de estratégias pedagógicas à medida que os alunos aprendem e o currículo se desenvolve.

Em resumo, a transposição didática dos números irracionais é um campo crítico na educação matemática. Requer estratégias pedagógicas bem planejadas, como exemplos práticos, visualizações geométricas, conexões com a vida cotidiana e uma abordagem interdisciplinar. Superar os desafios associados aos números irracionais é essencial para fornecer aos alunos uma base sólida de conhecimento matemático e prepará-los para aplicar esses conceitos em uma variedade de contextos. É um campo de estudo em constante evolução, à medida que educadores continuam a encontrar maneiras inovadoras de tornar os números irracionais acessíveis e relevantes para seus alunos.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, M. Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, v.7, n.3, p. 245-274, 2002.

BALL, D. L. What mathematical knowledge is needed for teaching mathematics? **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 23, n.4, p. 379-391, 2003.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, v.59, n.5, p. 389-407, 2008.

BARBEAU, E. J. Power of the irrational. **Mathematics Teacher**, v.93, n.2, 112-118, 2000.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. Aprendizagem significativa de números racionais e irracionais. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, v.43, p. 119-134, 2015.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 2011.

CARVALHO, D. L. P. **Números irracionais**: considerações e aspectos didáticos. 2006. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 2006.

CARVALHO, P. V.; PASSOS, C. L. Medo dos números irracionais: uma barreira a ser superada. *In*: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 14., 2019, Curitiba, PR. **Anais** [...]. Curitiba, PR: Champagnat, 2019. p. 85-94.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique:** du savoir savant au savoir enseigné. Metz, FR: La Pensée Sauvage, 1985.

COSTA, A. P.; CARVALHO, V. L**.** Ansiedade matemática no ensino dos números irracionais. *In*: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 14., 2019, Curitiba, PR. **Anais** [...]. Curitiba, PR: Champagnat, 2019. p. 76-85.

DRIJVERS, P.; DOORMAN, M.; BOON, P.; REED, H.; GRAVEMEIJER, K. The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. **Educational Studies in Mathematics**, v. 75, n.2, p. 213-234, 2010.

DUSEN, M. V. Teaching the golden ratio and Fibonacci numbers. **Mathematics Teacher**, v.102, n.2, p.132-139, 2009.

DUVAL, R. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics**. Educational Studies in Mathematics**, v.61, n.1-2, p.103-131, 2006.

ERNEST, P. The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: a model. **Journal of Education for Teaching**, v.15, n.1, p.13-33, 1989.

FARIAS, L. M.; LIMA, J. R. A formação continuada de professores no ensino de números irracionais. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências**, v.4, n.2, 109-118, 2021.

FONSECA, M. C.; RIBEIRO, J. C. Ensino e aprendizagem dos números irracionais. **Revista E-curriculum**, v.16, n.1, p. 60-69, 2018.

GOUVEIA, C. M. P. *et al*. A interdisciplinaridade como estratégia para o ensino dos números irracionais. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 17., 2020, Belém, PA. **Anais** [...]. Belém, PA: SBEM, 2020. p. 1-10.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Towards new documentation systems for mathematics teachers? **Educational Studies in Mathematics**, v.71, n.3, p.199-218, 2009.

HANNA, G.; SIDOLI, N. Visual reasoning in mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v.66, n. 2, p.129-144, 2007.

HIEBERT, J.; LEFEVRE, P. Conceptual and procedural knowledge in mathematics: an introductory analysis. *In*: HIEBERT, J.(ed.). **Conceptual and procedural knowledge**: the case of mathematics. London: Routledge, 1986. p. 1-27.

HIXSON, N.; RAVITCH, D. interdisciplinary curriculum: challenges and implementation. **The Clearing House**: a Journal of Educational Strategies, Issues and Ideas, v. 86, n. 6, p. 238-245, 2013.

JACOBS, H. H. (ed.). **Interdisciplinary curriculum**: design and implementation. Alexandria, VA: ASCD. 1989.

KILPATRICK, J.; SWAFFORD, J. O.; FINDELL, B. **Adding it up**: helping children learn mathematics. Washington, DC: National Academy Press, 2001.

LAVE, J. **Cognition in practice**: mind, mathematics and culture in everyday life. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

LEINHARDT, G. Elaborations on the relations between theory and practice. **Mind, Culture, and Activity**, v.1, n.4, p. 271-284, 1990.

LEITHOLD, L. Harbra. **O cálculo com geometria analítica**. São Paulo: Harbra, 2014. v.1.

LIMA, E. L. **Curso de análise**. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. (Projeto Euclides)

LOPES, C. E. Teaching irrational numbers and the use of calculator in the history of mathematics and mathematics education. **Mathematics Education Research Journal**, v.21, n.2, p.73-95, 2009.

NASCIMENTO, A. F. C. **Transposição didática no ensino de números irracionais**: uma proposta de sequência de ensino-aprendizagem. 2015. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2015.

NASCIMENTO, D. L. *et al*. A importância dos números irracionais no Ensino fundamental II. **Revista Científica Semana Acadêmica**, v. 4, n.1, p. 149-159, 2020.

PERRENOUD, P. **Números irracionais e transposição didática**: primeiros resultados e problemas a resolver. 1990. Tese (Doutorado em Ciências da Educação) - Universidade de Genebra, Genebra, 1990.

RAMOS, J. P.; OLIVEIRA, M. C. As concepções dos professores sobre o ensino dos números irracionais. **Revista Educação e Formação**, v. 5, n. 3, p. 48-55, 2020.

REMILLARD, J. T. Examining key concepts in research on teachers’ use of mathematics curricula. **Review of Educational Research**, v. 75, n. 2, p. 211-246, 2005.

REZENDE, L. M. A representação geométrica dos números irracionais. **Revista do Professor de Matemática**, v.91, n.24, p.71-75, 2016.

SANTOS, A. F. **Números irracionais e a história da matemática**: uma proposta interdisciplinar. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2012.

SILVA, A. M.; SANTOS, M. T. Desafios do ensino de números irracionais: uma análise da prática docente. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v.9, n.1, p. 91-98, 2018.

SMID, H. J. The rise and fall of some topics in Dutch school mathematics. **International Journal for the History of Mathematics Education**, v.7, n.2, p.47–64, 2012.

SOUZA, A. R. **Razão áurea e aplicações**: contribuições para a aprendizagem de proporcionalidade de alunos de 9° ano do Ensino fundamental. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, 2013

STAKE, R. E. The interdisciplinarity of the social sciences: three dimensions of disciplinary crossbreeding. *In*: FRODEMAN, R.; KLEIN, J. T.; MITCHAM, C. (ed.). **The Oxford Handbook of Interdisciplinarity**. Oxford: Oxford University Press, 2006. p. 73-81.

STEWART, I. A índia da hipopótama: Teorema de Pitágoras. *In*: STEWART, I. **17 equações que mudaram o mundo**. Rio de Janeiro: Zahar, 2013. cap. 1. p. 10-23.

STEWART, James. **Cálculo**. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

TALL, D. O.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, v.12, n.2, p. 151-169, 1981.

TALL, D. Teaching and learning advanced mathematical thinking. International **Journal of Science and Mathematics Education**, v. 11, n. 3, p. 391-413, 2013.