UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS - UFAL

CAMPUS ARAPIRACA

MATEMÁTICA - LICENCIATURA

JOSIVALDO JOSÉ DA SILVA

APLICAÇAO DO BINÔMIO DE NEWTON NOS CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE PARA *P* PRIMO, COM $7 \leq P \leq 19$

ARAPIRACA

2023

Josivaldo José da Silva

Aplicação do binômio de Newton nos critérios de divisibilidade para p primo, com $7 \leq p \leq 19$

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), apresentado ao corpo docente do curso de Matemática da Universidade Federal de Alagoas - UFAL, Campus Arapiraca, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Eben Alves da Silva

Arapiraca

2023

Universidade Federal de Alagoas – UFAL
Campus Arapiraca
Biblioteca Setorial *Campus* Arapiraca - BSCA

S586a Silva, Josivaldo José da
Aplicação do binômio de Newton nos critérios de divisibilidade para o p primo, com $7 \leq P \leq 19$ [recurso eletrônico] / Josivaldo José da Silva. – Arapiraca, 2023.
28 f.: il.

Orientador: Prof. Me. Eben Alves da Silva.
Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Alagoas, *Campus* Arapiraca, Arapiraca, 2023.
Disponível em: Universidade Digital (UD) – UFAL (*Campus* Arapiraca).
Referências: f. 28.

1. Divisibilidade - Critérios. 2. Número primo. 3. Newton, Binômio de. I. Silva, Eben Alves da. II. Título.

CDU 51

Bibliotecário responsável: Nestor Antonio Alves Junior
CRB - 4 / 1557

Josivaldo José da Silva

Aplicação do binômio de Newton nos critérios de divisibilidade para p primo, com $7 \leq p \leq 19$

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas - UFAL, Campus Arapiraca.

Data de Aprovação: 03/05/2023

Banca Examinadora

Documento assinado digitalmente
EBEN ALVES DA SILVA
Data: 30/05/2023 13:52:06-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Eben Alves da Silva
Universidade Federal de Alagoas-UFAL
Campus Arapiraca
(Orientador)

Documento assinado digitalmente
JOSE ARNALDO DOS SANTOS
Data: 30/05/2023 13:18:35-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. José Arnaldo dos Santos
Universidade Federal de Alagoas-UFAL
Campus Arapiraca
(Examinador)

Documento assinado digitalmente
JOSE DA SILVA BARROS
Data: 30/05/2023 10:20:15-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. José da Silva Barros
Universidade Federal de Alagoas-UFAL
Campus Arapiraca
(Examinador)

À minha querida mãe, Teresinha Maria da Silva (In memoriam), cujo a vida foi de dedicação exclusiva para os filhos. Aqui está o resultado do seu empenho. Com muita gratidão.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida e por ter me ajudado até aqui. Aos meus pais, que me apoiaram durante todos os anos de estudo de maneira incondicional. Aos meus irmãos, Josenildo (in memoriam) Joseildo, Josinaldo e Josinete, pelo suporte e incentivo em todos os momentos, e em especial a minha irmã Neves que sempre me apoiou em meus sonhos e projetos, gratidão eterna. A minha esposa Ludymilla, e meus filhos, Miguel e Letícia, pelo apoio e companheirismo nos momentos difíceis e pelos momentos alegres que passamos juntos durante essa caminhada. Ao Prof. Me. Eben Alves, pela orientação durante a construção deste trabalho e pela dedicação e ensinamentos ao longo do curso. Aos demais professores e colegas de turma que sempre estiveram disponíveis para ajudar e compartilhar seus conhecimentos.

“Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes.”

Isaac Newton

RESUMO

Este trabalho consiste em um estudo sobre os critérios de divisibilidade para p primo, com $7 \leq p \leq 19$ onde no ensino básico não são tratados durante o curso normal, e também os livros didáticos não fazem menção. Veremos um método que utiliza o Binômio de Newton para verificar tais critérios. Será feito uma abordagem sobre Binômio de Newton, e por fim, será apresentado uma demonstração clássica dos critérios de divisibilidade para cada p primo, $7 \leq p \leq 19$, utilizando o Binômio de Newton.

Palavras-chave: critérios de divisibilidade; número primo; binômio de Newton.

ABSTRACT

This work consists of a study on the divisibility criteria for p prime, with $7 \leq p \leq 19$ where in basic education they are not treated during the normal course, and also the textbooks do not mention them. We will see a method that uses Newton's Binomial to verify such criteria. An approach will be made on Newton's Binomial, and finally, a classic demonstration of the divisibility criteria for each p prime, $7 \leq p \leq 19$, using the Newton's Binomial will be presented.

Keywords: divisibility criteria; prime number; Newton's binomial.

SUMÀRIO

1	**INTRODUÇÃO . . . .**	**9**
2	**BINÔMIO DE NEWTON . . . .**	**10**
2.1	O BINÔMIO DE NEWTON	10
2.1.1	BREVE HISTÓRICO	10
3	**CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE USANDO O BINÔMIO DE NEWTON. . . . .**	**15**
3.1	REPRESENTAÇÃO DE UM NÚMERO $m \in N$ NA BASE 10	15
3.2	CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE PARA p PRIMO COM $7 \leq p \leq 19$. . .	16
4	**CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . .**	**27**
	REFERÊNCIAS	**28**

1 INTRODUÇÃO

Na matemática, a divisão é uma das quatro operações básicas, e está presente no estudo da porcentagem, fatoração, soma, subtração de fração e no estudo de várias outras operações. A operação divisão é essencial no nosso dia a dia, precisamos dela para separar uma quantidade em partes, seja uma receita de bolo, que precisamos dividir os ingredientes pela quantidade da massa, uma simples conta que precisa ser dividida entre amigos, ou uma herança que precisa ser dividida entre irmãos. Em alguns casos, não nos interessa o resultado da divisão, queremos saber apenas, se essa divisão é exata. Aí a importância do estudo dos Critérios de Divisibilidade, quando temos um $a \in Z$, que é divisível por b, e o resto é zero. Aprendemos no ensino básico que, para cada número existe um critério de divisibilidade, como por exemplo:

Por 2: Um número é divisível por 2, quando ele é par.

Por 3: Um número é divisível por 3, se a soma de seus algarismo é divisível por três.

Por 5: Um número é divisível por 5, se o ultimo algarismo é 0 ou 5.

Cada vez que o número vai aumentando, vai tornando-se difícil a memorização desses critérios. Por Isso, neste trabalho, demonstraremos alguns critérios de divisibilidade, utilizando o Binômio de Newton dado por:

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot a^k$$

Trataremos da verificação de que se, dado $m \in Z$, quando m é divisível por p primo com $7 \leq p \leq 19$, onde esse intervalo será o objeto no nosso estudo. Será feita uma abordagem inicial sobre o Binômio de Newton e, depois trataremos dos critérios fazendo a demonstração para cada p, primo, deste intervalo. Queremos enfatizar a importância deste teorema no estudo dos critérios de divisibilidade.

2 BINÔMIO DE NEWTON

Neste capítulo, enunciaremos o Binômio de Newton e demonstraremos. Para tal, as referências utilizadas neste capítulo foram Gonçalves (1979), Domingues; Iezzi *et al*. (2018) e Garcia; Lequain (2006).

2.1 O BINÔMIO DE NEWTON

2.1.1 Breve Histórico

O termo Binômio de Newton é dedicado ao inglês Isaac Newton (1642-1727), físico e matemático, nascido em Woolsthorpe Manor, localizado na Grã-Bretanha. Na verdade, diversos matemáticos contribuíram para o desenvolvimento do Binômio de Newton com expoente $n \in \mathbb{N}$. Casos especiais já eram conhecidos desde o século 4 a.C, bem como o matemático grego Euclides que já mencionava um caso especial do binômio para expoente $n = 2$. O Binômio de Newton pode ser encontrado também no trabalho do matemático persa Al-Karaji, que viveu no século XI que descreveu o padrão triangular dos coeficientes binomiais e também forneceu uma prova matemática do Binômio de Newton e do triângulo de Pascal usando uma forma primitiva de indução matemática.

De acordo com Tognato II (2013), verdade seja dita, o Binômio de Newton era conhecido como Teorema Binomial e refere-se a uma construção algébrica que se constituiu bem antes da época de Newton, porém apenas ele logrou êxito em conquistar plena propriedade desta ferramenta e de toda sua potencialidade. Segundo o autor, o desenvolvimento do binômio nas mãos de Newton, tornou-se algo quase tão moderno quanto em nossa época, o que dá jus ao nome. Segundo Tognato II (2013), o Binômio de Newton é um dos assuntos mais sofisticado da História da Matemática. É bem verdade que este dispositivo envolve alta complexidade na aprendizagem proposta no ensino básico, mas a sua importância e proficiência são nítidas e perceptíveis nos ramos fundamentais da matemática atual.

Certamente estamos familiarizados desde o curso básico com algumas potências de um binômio.

Assim, temos:

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

A seguir, demonstraremos a expressão matemática para o Binômio de Newton $(a+b)^n$, para qualquer inteiro *n* positivo.

Definição 2.1. Fatorial: Sejam $n \in$ N. Definimos Fatorial de *n* e denotamos por $n!$ como sendo:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot\cdots\cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Observação 2.1. Com relação ao fatorial de 0 admitimos por convenção como sendo: 0! = 1.

Definição 2.2. (Coeficientes Binomiais): Sejam n e k inteiros não negativos. Definimos coeficientes binomiais aos números dados por:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Observação 2.2. Pela Observação 2.1 tem-se que $\binom{n}{1} = n, \binom{n}{0} = 1e\binom{n}{n} = 1$

Observação 2.3. Existem várias propriedades básicas dos coeficientes binomiais. A seguir citamos sem demonstração duas delas cujas demonstrações podem ser vistas nas referências (LIMA, 1998), (HAZZAN, 2013) e (MILLES, 2001).

1.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

(Coeficientes binomiais complementares)

2.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

(Relação de Stifel)

A partir das definições e observações citadas acima, podemos demonstrar o Binômio de Newton, mas antes veja, na figura abaixo, o que acontece se variarmos $n \in \mathbb{N}$ de 0 a 4 na expressão $(a+b)^n$. Verifica-se sem dificuldade nestes desenvolvimentos que os coeficientes respectivamente de cada termos são os coeficientes binomiais

Quadro 1 - Coeficientes de cada termo de um binômio

Para $n = 0$	$(x + a)^0 = 1$	$(x + a)^0 \binom{0}{0} x^0 a^0$
Para $n = 1$	$(x + a)^1 = 1x + 1a$	$(x + a)^1 = \binom{1}{0} x^1 a^0 + \binom{1}{1} x^0 a^1$
Para $n = 2$	$(x + a)^2 = 1x^2 + 2xa + 1a^2$	$(x + a)^2 = \binom{2}{0} x^2 a^0 + \binom{2}{1} x^1 a^1 + \binom{2}{2} x^0 a^2$
Para $n = 3$	$(x + a)^3 = 1x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + 1a^3$	$(x + a)^3 = \binom{3}{0} x^3 a^0 + \binom{3}{1} x^2 a^1 + \binom{3}{2} x^1 a^2 + \binom{3}{3} x^0 a^3$
Para $n = 4$	$(x + a)^4 = 1x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + +1a^4$	$(x + a)^4 = \binom{4}{0} x^4 a^0 + \binom{4}{1} x^3 a^1 + \binom{4}{2} x^2 a^2 + \binom{4}{3} x^1 a^3 + \binom{4}{4} x^0 a^4$

Fonte: O autor (2023).

Observação 2.4. Ao desenvolver o binômio de Newton $(x + a)^n$ verifica-se que:

1. $(x + a)^n$ possui $n + 1$ termos.
2. Os expoentes do termo x decrescem de n até 0 e os do termo a crescem de 0 até n.
3. Cada expoente de x é igual à diferença entre o numerador e o denominador do coeficiente (número binomial) correspondente e cada expoente de a é igual ao respectivo denominador do número binomial correspondente.
4. A soma dos expoentes do termo x e a é sempre n.

Assim, podemos escrever a forma canônica do Binômio de Newton da seguinte forma:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0} x^n a^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} a^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} x^1 a^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 a^n$$

E, naturalmente, podemos reescrever de maneira mais elegante como:

$$(x + a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot a^k$$

Observação 2.5. O termo $\binom{n}{k} x^{n-k} \cdot a^k$ é chamado termo genérico do Binômio de Newton.

Teorema 2.1. *Sejam x e a inteiros e n um inteiro positivo. Então:*

$$(x+a)^n = \binom{n}{0} x^n a^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} a^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} x^1 a^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 a^n$$

Demonstração. Usaremos a ferramenta chamada indução finita primeira forma. O leitor interessado poderá verificar esse tema na referência (HEFEZ, 2006), (MILIES; COELHO, 2001).

Para $n = 1$ a expressão obtida é $(x+a)^1 = \binom{1}{0} x^1 a^0 + \binom{1}{1} x^0 a^1 = x + a$; logo, a afirmação é verdadeira neste caso. Suponhamos, então, que a expressão do binômio é válida para $n = k \geq 1$, ou seja,

$$(x+a)^k = \binom{k}{0} x^k a^0 + \binom{k}{1} x^{k-1} a^1 + \cdots + \binom{k}{k-1} x^1 a^{k-1} + \binom{k}{k} x^0 a^k$$

$$(x+a)^k = \binom{k}{0} x^k + \binom{k}{1} x^{k-1} a + \cdots + \binom{k}{k-1} x a^{k-1} + \binom{k}{k} a^k$$

Daí, temos que:

$$(x+a)^{k+1} = (x+a)^k \cdot (x+a) = x \cdot (x+a)^k + a \cdot (x+a)^k$$

Usando a hipótese de indução, segue que:

$$x \cdot (x+a)^k = \binom{k}{0} x^{k+1} + \binom{k}{1} x^k a + \cdots + \binom{k}{k-1} x^2 a^{k-1} + \binom{k}{k} x a^k$$

$$a \cdot (x+a)^k = \binom{k}{0} x^k a + \binom{k}{1} x^{k-1} a^2 + \cdots + \binom{k}{k-1} x a^k + \binom{k}{k} a^{k+1}$$

Agora, somando ambas as equações, temos:

$$(x+a)^{k+1} = \binom{k}{0} x^{k+1} +$$

Usando repetidamente a relação de Stifel e os coeficientes binomiais complementares conforme Observação 2.3, obtemos:

$$(x+a)^{k+1} = \binom{k}{0}x^{k+1} + \binom{k+1}{1}x^k a + \cdots + \binom{k+1}{k}xa^k + \binom{k}{k}a^{k+1}$$

Note que $\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0}$ e $\binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}$, temos finalmente:

$$(x+a)^{k+1} = \binom{k+1}{0}x^{k+1} + \binom{k+1}{1}x^k a + \cdots + \binom{k+1}{k}xa^k + \binom{k+1}{k}a^{k+1}$$

Portanto, a expressão binomial vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.1. No desenvolvimento de $\left(x^2 + \frac{1}{2x}\right)^n$, os três primeiros coeficientes estão em Progressão Aritmética. Determinar o valor de n.

Solução: Usando o Binômio de Newton, temos:

$$a_1 = \binom{n}{0}, \quad a_2 = \frac{1}{2}\binom{n}{1} \text{ e } a_3 = \frac{1}{4}\binom{n}{2}$$

Como $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$ e $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, temos:

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{n}{2} \text{ e } a_3 = \frac{n(n-1)}{8}$$

Sabemos que a_1, a_2, a_3 estão em *PA*, segue que $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, logo:

$$\begin{aligned} \frac{n}{2} - 1 &= \frac{n(n-1)}{8} - \frac{n}{2} \\ \frac{n}{2} + \frac{n}{2} - 1 &= \frac{n(n-1)}{8} \\ n - 1 &= \frac{n(n-1)}{8} \\ 8n - 8 &= n^2 - n \\ n^2 - n - 8n + 8 &= 0 \\ n^2 - 9n + 8 &= 0 \end{aligned}$$

Verifica-se então que as raízes são $n = 1$ ou $n = 8$. Para $n = 1$, não temos solução, pois

$\left(x^2 + \frac{1}{2x}\right)^n$ não terá três coeficientes no desenvolvimento. Portanto, $n = 8$.

3 CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE USANDO O BINÔMIO DE NEWTON

Com base no conhecimento construído até aqui, iniciaremos agora o estudo do maior objetivo deste trabalho, que relaciona os critérios de divisibilidade prima p onde $7 \leq p \leq 19$ com o Binômio de Newton. Em seguida faremos algumas aplicações desses critérios para uma maior fundamentação, com o objetivo de criar a curiosidade do leitor em busca de mais conhecimento sobre o assunto abordado. As referências utilizadas neste capítulo foram Domingues; Iezzi *et al*. (2018), Milies (2001) e Lima (1998).

3.1 REPRESENTAÇÃO DE UM NÚMERO $m \in \mathbb{N}$ NA BASE 10

Definição 3.1. Dado um número $m \in \mathbb{N}$ podemos expressar m na base 10 da seguinte forma:

$$m = 10^n an + 10^{n-1} an - 1 + \cdots + 10a1 + a0$$

ou também na forma de somatório, isto é,

$$m = (x + a)^n = \sum_{i=0}^{n} 10^i a_i = \sum_{i=1}^{n} 10^i a_i + a_0$$

Exemplo 3.1. Considere $m = 1924$ e façamos as seguintes divisões sucessivas:

$1924 = 192 \cdot 10 + 4$; $192 = 19 \cdot 10 + 2$; $19 = 1 \cdot 10 + 9$ e $1 = 0 \cdot 10 + 1$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} 1924 &= 192 \cdot 10 + 4 \\ &= (19 \cdot 10 + 2) \cdot 10 + 4 \\ &= 19 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 4 \\ &= (1 \cdot 10 + 9) \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 4 \\ &= 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 4 \end{aligned}$$

Assim, obtemos a seguinte expressão:

$$1924 = 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 4 \cdot 10^0$$

Ou seja, expressamos 1924 como uma soma de múltiplos de potências de 10, sendo os coeficientes das potências exatamente os restos obtidos nas divisões acima, os quais, nesse caso, coincidem com os dígitos que aparecem na representação do número 1924.

3.2 CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE PARA p PRIMO COM $7 \leq p \leq 19$

Viabilizando verificar os critérios de divisibilidade de um número natural m por p primo com $7 \leq p \leq 19$, utilizaremos fortemente o Binômio de Newton para definir e desenvolver os possíveis padrões na construção desses critérios.

Proposição 3.1. *(Critério de Divisibilidade para p = 7).*
Seja $m = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \cdots + 10 a_1 + a_0$ *um número natural. m é divisível por 7 se* $a_0 + 3a_1 + 3^2 a_2 + \cdots + 3^n a_n$ *é divisível por 7.*

Demonstração. Vamos utilizar o conhecimento do Binômio de Newton e a representação na base 10 para demonstrar esse critério. Para isto considere

$$m = \sum_{i=1}^{n} 10^i \, a_i + a_0$$

Note que $m - a_0 = \sum_{i=1}^{n} 10^i \, a_i = \sum_{i=1}^{n} (7+3)^i a_i$. Daí,

$$(\quad) m - a_0 = \sum_{i=1}^{n} (7+3)^i \, a_i$$
$$(7+3)a_1 + (7+3)^2 a_2 + \cdots + (7+3)^n a_n.$$

Desenvolvendo cada soma temos

- $(7 + 3)a_1 = 7a_1 + 3a_1$
- $(7 + 3)^2 a_2 = 7^2 a_2 + 2 \cdot 7 \cdot 3a_2 + 3^2 a_2 = 7 \cdot (7a_2 + 6a_2) + 3^2 a_2$
- $\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$
- $(7+3)^n a_n = \left[7^n + \binom{n}{1} 7^{n-1} \cdot 3 + \cdots + \binom{n}{n-1} 7 \cdot 3^{n-1} + 3^n\right] a_n$

  $(7+3)^n a_n = 7 \cdot [7^{n-1} a_n + \binom{n}{1} 7^{n-2} 3a_n + \cdots + \binom{n}{n-1} 3^{n-1} a_n] + 3^n a_n$

Fazendo $A_1 = a_1$, $A_2 = 7a_2 + 2 \cdot 3a_2$, ..., $A_n = 7^{n-1} a_n + \binom{n}{1} 7^{n-2} 3a_n + \cdots + \binom{n}{n-1} 3^{n-1} a_n$ obtemos:

- $(7+3)a_1 = 7 \cdot A_1 + 3a_1$
- $(7+3)^2 a_2 = 7 \cdot A_2 + 3^2 a_2$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

- $(7+3)^n a_n = 7 \cdot A_n + 3^n a_n$

Substituindo as somas desenvolvidas em (*) temos:

$$
\begin{aligned}
m - a_0 &= \sum_{i=1}^{n} (7+3)^i a_i \\
&= (7+3)a_1 + (7+3)^2 a_2 + \cdots + (7+3)^n a_n \\
&= 7A_1 + 3a_1 + 7A_2 + 3^2 a_2 + \cdots + 7A_n + 3^n a_n \\
&= 7 \cdot (A_1 + A_2 + \cdots + A_n) + 3a_1 + 3^2 a_2 + \cdots + 3^n a_n \\
&= 7A + 3a_1 + 3^2 a_2 + \cdots + 3^n a_n
\end{aligned}
$$

Com $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$. Portanto, m é divisível por 7 se $3a_1 + 3^2 a_2 + \cdots + 3^n a_n + a_0$ é divisível por 7. Na notação de somatório teremos: m é divisível por 7 se $\sum_{i=1}^{n} 3^i a_i + a_0$ é divisível por 7.

Exemplo 3.2. Aplicaremos o teste para $m = 1729$. Para isto, temos $a_0 = 9$, $a_1 = 2$, $a_2 = 7$ e $a_3 = 1$. Daí, verificando se m é divisível por 7, temos:

$$\sum_{i=1}^{3} 3^i a_i + a_0 = 9 + 3 \cdot 2 + 3^2 \cdot 7 + 3^3 \cdot 1 = 105$$

Podemos continuar usando o critério agora para 105, onde $a_0 = 5$, $a_1 = 0$ e $a_2 = 1$, obtendo:

$$\sum_{i=1}^{2} 3^i ai + a0 \;\; 3^1 \cdot 0 + 3^2 \cdot 1 + 5 = 0 + 9 + 5 = 14$$

Como 14 é múltiplo de 7, então o critério garante que 1729 é divisível por 7.

Exemplo 3.3. A seguir mostraremos que 1213 não é divisível por 7. Sendo $a_0 = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ e $a_3 = 1$ temos:

$$\sum_{i=1}^{3} 3^i a_i + a_0 = 3^1 \cdot 1 + 3^2 \cdot 2 + 3^3 \cdot 1 + 3 = 51$$

Podemos parar aqui pois, sabemos que 51 não é múltiplo de 7, e portanto, 1213 não é divisível por 7.

Proposição 3.2. (*Critério de Divisibilidade para p = 11*)
Seja $m = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} - 1 + \cdots + 10^1 a_1 + a_0$ *um número natural.* m *é divisível por 11 se,* $a_0 + (-1)a_1 + (-1)^2 a_2 + (-1)^3 a_3 \cdots + (-1)^n a_n$ *é divisível por 11.*

Demonstração. A seguir demonstraremos o critério de divisibilidade para $p = 11$. Vamos seguir a mesma ideia. Considere

$$m = \sum_{i=1}^{n} 10^i\, a_i + a_0$$

Note que $m - a_0 = \sum_{i=1}^{n} 10^i\, a_i = \sum_{i=1}^{n}$. Daí,

$$\sum_{i=1}^{n} \big(11 + (-1)\big)^i a_i$$
$$\big(11 + (-1)\big)a_1 + \big(11 + (-1)\big)^2 a_2 + \cdots + \big(11 + (-1)\big)^n a_n$$

Desenvolvendo cada soma temos:

- $(11 + (-1))a_1 = 11a_1 + (-1)a_1$
- $(11 + (-1))^2 a_2 = 11^2 a_2 + 2 \cdot 11 \cdot (-1)a_2 + (-1)^2 a_2 = 11 \cdot (11a_2 - 2a_2) + (-1)^2 a_2$
- $\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$$(11+(-1))^n a_n = \left(11^n + \binom{n}{1}11^{n-1}(-1)^1 + \cdots + \binom{n}{n-1}11(-1)^{n-1} + (-1)^n\right) a_n$$

- $(11+(-1))^n a_n = 11 \cdot \left(11^{n-1}a_n + \binom{n}{1}11^{n-2}(-1)a_n + \cdots + \binom{n}{n-1}(-1)^{n-1}a_n\right) +$
  $+(-1)^n a_n$

fazendo
$B_1 = a_1,\ B_2 = 11a_2 - 2a_2,\ \cdots,\ B_n = 11^{n-1}a_n + \binom{n}{1}11^{n-2}(-1)a_n + \cdots +$
$+\binom{n}{n-1}(-1)^{n-1}a_n$ obtemos:

- $(11+(-1))a_1\ 11B_1 + (-1)a_1$
- $(11+(-1))^2 a_2\ 11B_2 + (-1)^2 a_2$
- $\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$
- $(11+(-1))^n a_n\ 11B_n + (-1)^n a_n$

Substituindo as somas desenvolvidas em (**) temos:

$$\begin{aligned}
m - a_0 &= \sum_{i=1}^{n}(11+(-1))^i a_i \\
&= (11+(-1))a_1 + (11+(-1))^2 a_2 + \cdots + (11+(-1))^n a_n \\
&= 11B_1 + (-1)a_1 + 11B_2 + (-1)^2 a_2 + \cdots + 11B_n + (-1)^n a_n \\
&= 11 \cdot (B_1 + B_2 + \cdots + B_n) + (-1)a_1 + (-1)^2 a_2 + \cdots + (-1)^n a_n \\
&= 11B + (-1)a_1 + (-1)^2 a_2 + \cdots + (-1)^n a_n
\end{aligned}$$

com $B = B_1 + B_2 + \cdots + B_n$. Portanto, m é divisível por 11 se $(-1)a_1 + (-1)^2 a_2 + \cdots + (-1)^n a_n + a_0$ é divisível por 11. Na notação de somatório teremos: m é divisível por 11 se $\sum_{i=1}^{n} 3^i a_i + a_0$ é divisível por

Exemplo 3.4. Aplicaremos o teste para $m = 4653$. Para isto, temos $a_0 = 3$, $a_1 = 5$, $a_2 = 6$ e $a_3 = 4$. Daí,verificando se m é divisível por 11, temos:

$$\sum_{i=1}^{3}(-1)^i a_i + a_0 = 3 + (-1)\cdot 5 + (-1)^2\cdot 6 + (-1)^3\cdot 4 = 3 - 5 + 6 - 4 = 0$$

Como 0 é múltiplo de 11, então o critério garante que 4653 é divisível por11.

Observação 3.1. O critério para $p = 11$ apresentado é o mesmo que aprendemos nos cursos de Introdução à Teoria do Números na graduação e é caracterizado pela soma dos a_i com i par subtraindo do a_j com j ímpar, ou seja, m é divisível por 11 se $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n$.

Exemplo 3.5. A seguir mostraremos que 1465 não é divisível por 11. Sendo $a_0 = 5$, $a_1 = 6$, $a_2 = 4$ e $a_3 = 1$ temos:

$$\sum_{i=1}^{3}(-1)^i a_i + a_0 = 5 - 6 + 4 - 1 = 2$$

Podemos parar aqui pois, sabemos que 2 não é múltiplo de 11, e portanto, 1465 também não é divisível por 11

Proposição 3.3. *(Critério de Divisibilidade para p = 13)*

Seja $m = 10^n a_n + 10^{n-1}a_{n-1} + \cdots + 10^1 a_1 + a_0$ um número natural. m é dívisível por 13 se $a_0 + (-3)^1 a_1 + (-3)^2 a_2 + \cdots + (-3)^n a_n$ é divisível por 13

Demonstração. Dando sequência, vamos demonstrar o critério de divisibilidade para $p = 13$ seguindo a mesma ideia. Considerando

$$m = \sum_{i=1}^{n} 10^i\, a_i + a_0$$

Segue que $m - a_0 = \sum_{i=1}^{n} 10^i\, a_i = \sum_{i=1}^{n}$. Daí,

$$(*) m - a_0 = \sum_{i=1}^{n}\big(13 + (-3)\big)^i a_i$$
$$\big(13 + (-3)\big)a_1 + \big(13 + (-3)\big)^2 a_2 + \cdots + \big(13 + (-3)\big)^n a_n$$

Desenvolvendo cada soma temos:

- $(13 + (-3))a_1 = 13a_1 + (-3)a_1$
- $(13 + (-3))^2 a_2 = 13^2 a_2 + 2\cdot 13\cdot(-3)a_2 + (-3)^2 a_2 = 13\cdot(13a_2 - 6a_2) + (-3)^2 a_2$

- $\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$

- $\big(13 + (-3)\big)^n a_n =$

$$\begin{aligned}&\big(13 + (-3)\big)^n a_n \\ &= 13\left(13^{n-1}a_n + \binom{n}{1}13^{n-2}(-3)a_n + \cdots + \binom{n}{n-1}(-3)^{n-1}a_n\right) + (-3)^n a_n\end{aligned}$$

fazendo
$C_1 = a_1,\ C_2 = 13a_2 - 6a_2,\ \cdots,\ C_n = 13^{n-1}a_n + \binom{n}{1}13^{n-2}(-3)a_n + \cdots +$
$+\binom{n}{n-1}(-3)^{n-1}a_n$ obtemos:

- $\big(13 + (-3)\big)a_1\ 13C_1 + (-3)a_1$

- $\big(13 + (-3)\big)^2 a_2\ 13C_2 + (-3)^2 a_2$

- $\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

- $\big(13 + (-3)\big)^n a_n\ 13C_n + (-3)^n a$

Substituindo as somas desenvolvidas em (***) temos:

$$\begin{aligned} m - a_0 &= \sum_{i=1}^{n}(13 + (-3))^i a_i \\ &= (13 + (-3))a_1 + (13 + (-3))^2 a_2 + \cdots + (13 + (-3))^n a_n \\ &= 13C_1 + (-3)a_1 + 13C_2 + (-3)^2 a_2 + \cdots + 13C_n + (-3)^n a_n \\ &= 13 \cdot (C_1 + C_2 + \cdots + C_n) + (-3)a_1 + (-3)^2 a_2 + \cdots + (-3)^n a_n \\ &= 13C + (-3)a_1 + (-3)^2 a_2 + \cdots + (-3)^n a_n \end{aligned}$$

com $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$. Portanto, m é divisível por 13 se $(-3)a_1 + (-3)^2 a_2 + \cdots + (-3)^n a_n + a_0$ é divisível por 13. Na notação de somatório teremos: m é divisível por 13 se $\sum_{i=1}^{n}(-3)^i a_i + a_0$ é divisível por 13.

Exemplo 3.6. Aplicaremos o teste para $m = 1729$. sendo assim, temos $a_0 = 9$, $a_1 = 2$, $a_2 = 7$ e $a_3 = 1$. Daí,verificando se m é divisível por 13, temos:

$$\sum_{i=1}^{3}(-3)^i a_i + a_0 = 9 + (-3)\cdot 2 + (-3)^2 \cdot 7 + (-3)^3 \cdot 1 = 9 - 6 + 63 - 27 = 39$$

Como 39 é múltiplo de 13, então o critério garante que 1729 é divisível por 13.

Exemplo 3.7. Considere agora, $m = 1271$ e vejamos se m é divisível ou não por 13. Sendo $a_0 = 1$, $a_1 = 7$, $a_2 = 2$ e $a_3 = 1$ temos:

$$\sum_{i=1}^{3}(-3)^i a_i + a_0 = 1 + (-3)\cdot 7 + (-3)^2 \cdot 2 + (-3)^3 \cdot 1 = 1 - 21 + 18 - 27 = -29$$

Podemos parar aqui pois, sabemos que -29 não é múltiplo de 13, e portanto, 1271 também não é divisível por 13.

Proposição 3.4. *(Critério de Divisibilidade para p = 17)*

Seja $m = 10^n a_n + 10^{n-1}a_{n-1} + \cdots + 10^1 a_1 + a_0$ *um número natural. m é divisível por 17 se* $a_0 + (-7)^1 a_1 + (-7)^2 a_2 + \cdots + (-7)^n a_n$ *é divisível por 17.*

Demonstração. Vamos desenvolver agora a demonstração do critério de divisibilidade para $p = 17$. Da mesma forma dos critérios já feitos, consideremos

$$m = \sum_{i=1}^{n} 10^i\, a_i + a_0$$

Segue que $m - a_0 = \sum_{i=1}^{n} 10^i\, a_i = \sum_{i=1}^{n}$. Daí,

$$(v) m - a_0 = \sum_{i=1}^{n}\big(17 + (-7)\big)^i a_i$$

$$\big(17 + (-7)\big)a_1 + \big(17 + (-7)\big)^2 a_2 + \cdots + \big(17 + (-7)\big)^n a_n$$

Desenvolvendo cada soma temos:

- $(17 + (-7))a_1 = 17a_1 + (-7)a_1$
- $(17 + (-7))^2 a_2 = 17^2 a_2 + 2 \cdot 17 \cdot (-7)a_2 + (-7)^2 a_2 = 17 \cdot (17a_2 - 14a_2) + (-7)^2 a_2$
- $\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$
- $\big(17 + (-7)\big)^n a_n =$

$$\left(17+(-7)\right)^n a_n$$
$$= 17\left(17^{n-1}a_n + \binom{n}{1}17^{n-2}(-7)a_n + \cdots + \binom{n}{n-1}(-7)^{n-1}a_n\right) + (-7)^n a_n$$

fazendo
$D_1 = a_1,\ D_2 = 17a_2 - 14a_2,\ \cdots,\ D_n = 17^{n-1}a_n + \binom{n}{1}17^{n-2}(-7)a_n + \cdots +$
$+\binom{n}{n-1}(-7)^{n-1}a_n$
obtemos:

- $\left(17+(-7)\right)a_1\ 17D_1 + (-7)a_1$
- $\left(17+(-7)\right)^2 a_2\ 17D_2 + (-7)^2 a_2$
- $\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$
- $\left(17+(-7)\right)^n a_n\ 17D_n + (-7)^n a_n$

Substituindo as somas desenvolvidas em $(*v)$ temos:

$$\begin{aligned}
m - a_0 &= \sum_{i=1}^{n}(17+(-7))^i a_i \\
&= (17+(-7))a_1 + (17+(-7))^2 a_2 + \cdots + (17+(-7))^n a_n \\
&= 17D_1 + (-7)a_1 + 17D_2 + (-7)^2 a_2 + \cdots + 17D_n + (-7)^n a_n \\
&= 17\cdot(D_1 + D_2 + \cdots + D_n) + (-7)a_1 + (-7)^2 a_2 + \cdots + (-7)^n a_n \\
&= 17D + (-7)a_1 + (-7)^2 a_2 + \cdots + (-7)^n a_n
\end{aligned}$$

com $D = D_1 + D_2 + \cdots + D_n$. Portanto, m é divisível por 17 se $(-7)a_1 + (-7)^2 a_2 + \cdots$ $+(-7)^n a_n + a0$ é divisível por 17. Na notação de somatório teremos: m é divisível por 17 se $\sum_{i=1}^{n}(-7)^i a_i + a_0$ é divisível por 17.

Exemplo 3.8. Aplicaremos o teste para $m = 1003$. Sendo assim, temos $a_0 = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ e $a_3 = 1$. Daí, verificando se m é divisível por 17, temos:

$$\sum_{i=1}^{3}(-7)^i a_i + a_0 = 3 + (-7)\cdot 0 + (-7)^2 \cdot 0 + (-7)^3 \cdot 1 = 3 - 0 + 0 - 343 = -340$$

Podemos parar aqui pois, -340 é múltiplo de 17, então o critério garante que 1003 é divisível por 17. Se caso continuássemos aplicando o critério acharíamos no final o resultado -34 que é múltiplo de 17.

Exemplo 3.9. Considere agora, $m = 1701$ e vejamos se m é divisível ou não por 17. Sendo $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 7$ e $a_3 = 1$ temos:

$$\sum_{i=1}^{3}(-7)^i a_i + a_0 = 1 + (-7)\cdot 0 + (-7)^2 \cdot 7 + (-7)^3 \cdot 1 = 1 - 0 + 343 - 343 = 1$$

Podemos parar aqui pois, sabemos que 1 não é múltiplo de 17, e portanto, 1701 também não é divisível por 17.

Proposição 3.5. *(Critério de Divisibilidade para $p = 19$).*

Seja $m = 10^n a_n + 10^{n-1}a_{n-1} + \cdots + 10^1 a_1 + a_0$ um número natural. m é divisível por 19 se $a_0 + (-9)^1 a_1 + (-9)^2 a_2 + \cdots + (-9)^n a_n$ é divisível por 19.

Demonstração. Finalmente, iremos desenvolver a demonstração do critério de divisibilidade para $p = 19$. Assim, considere:

$$m = \sum_{i=1}^{n} 10^i a_i + a_0$$

Segue que $m - a_0 = \sum_{i=1}^{n} 10^i a_i = \sum_{i=1}^{n}$. Daí,

$$(v) m - a_0 = \sum_{i=1}^{n}\big(19 + (-9)\big)^i a_i$$

$$\big(19 + (-9)\big)a_1 + \big(19 + (-9)\big)^2 a_2 + \cdots + \big(19 + (-9)\big)^n a_n$$

Desenvolvendo cada soma temos:

- $(19+(-9))a_1 = 19a_1 + (-9)a_1$
- $(19+(-9))^2a_2 = 19^2a_2 + 2 \cdot 19 \cdot (-9)a_2 + (-9)^2a_2 = 19 \cdot (19a_2 - 18a_2) + (-9)^2a_2$
- $\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$
-

)

$+(-9)^n a_n$

Fazendo

$E_1 = a_1,\ E_2 = 19a_2 - 18a_2,\ \cdots,\ E_n = 19^{n-1}a_n + \binom{n}{1}19^{n-2}(-9)a_n + \cdots + + \binom{n}{n-1}(-9)^{n-1}a_n$ obtemos:

- $(19+(-9))a_1\ 19D_1 + (-9)a_1$
- $(19+(-9))^2a_2\ 19D_2 + (-9)^2a_2$
- $\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$
- $(19+(-9))^n a_n\ 19D_n + (-9)^n a_n$

Substituindo as somas desenvolvidas em (v) temos:

$$
\begin{aligned}
m - a_0 &= \sum_{i=1}^{n}(19+(-9))^i a_i \\
&= (19+(-9))a_1 + (19+(-9))^2a_2 + \cdots + (19+(-9))^n a_n \\
&= 19E_1 + (-9)a_1 + 19E_2 + (-9)^2a_2 + \cdots + 19E_n + (-9)^n a_n \\
&= 19 \cdot (E_1 + E_2 + \cdots + E_n) + (-9)a_1 + (-9)^2a_2 + \cdots + (-9)^n a_n \\
&= 19E + (-9)a_1 + (-9)^2a_2 + \cdots + (-9)^n a_n
\end{aligned}
$$

com $E = E_1 + E_2 + \cdots + E_n$. Portanto, m é divisível por 19 se $(-9)a_1 + (-9)^2a_2 + \cdots + (-9)^n a_n + a_0$ é divisível por 19. Colocando na notação de somatório teremos: m é divisível por 19 se $\sum_{i=1}^{n}(-7)^i a_i + a_0$é divisível por 19.

Exemplo 3.10. Aplicaremos o teste para m = 1729. Sendo assim, temos $a_0 = 9$, $a_1 = 2$, $a_2 = 7$ e $a_3 = 1$. Daí, verificando se m é divisível por 19, temos:

$$\sum_{i=1}^{3}(-9)^i a_i + a_0 = 9 + (-9)\cdot 2 + (-9)^2 \cdot 7 + (-9)^3 \cdot 1 = 9 - 18 + 567 - 729 = -171$$

Continuando com o número 171 pois se -171 for múltiplo de 19, seu módulo também será, temos $a_0 = 1$, $a_1 = 7$ e $a_2 = 1$. Daí,

$$\sum_{i=1}^{3}(-9)^i a_i + a_0 = 1 + (-9)\cdot 7 + (-9)^2 \cdot 1 = 1 - 63 + 81 = 19$$

Portanto, 171 é múltiplo de 19, o que garante que -171 também é múltiplo de 19. Concluímos assim, que 1729 é divisível por 19.

Exemplo 3.11. Considere agora, m = 1701 e vejamos se m é divisível ou não por 19. Sendo $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 7$ e $a_3 = 1$ temos:

$$\sum_{i=1}^{3}(-9)^i a_i + a_0 = 1 + (-9)\cdot 0 + (-9)^2 \cdot 7 + (-9)^3 \cdot 1 = 1 - 0 + 567 - 729 = -161$$

continuando com o número 161 pois se -161 for múltiplo de 19, seu módulo também será, temos $a_0 = 1$, $a_1 = 6$ e $a_2 = 1$. Daí,

$$\sum_{i=1}^{3}(-9)^i a_i + a_0 = 1 + (-9)\cdot 6 + (-9)^2 \cdot 1 = 1 - 54 + 81 = 28$$

Podemos notar que 28 não é múltiplo de 19 e concluímos assim que 161 também não é, bem como -161. Portanto, 1701 não é divisível por 19

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante do exposto foi possível chegar ao objetivo principal desse trabalho, a saber, a apresentação de um método de verificação para os critérios de divisibilidade, o qual nos permitiu sabermos se $m \in$ Z, é divisível por p, em particular, estudamos o intervalo dos primos p, tais que $7 \leq p \leq 19$. Embora os critérios de divisibilidade sejam estudados no ensino normal, foi possível apresentar um método, para valores que não são abordados nos livros didáticos. A partir do estudo do teorema binomial, conseguimos aplicar o binômio de Newton nos critérios de divisibilidade, e fazendo alguns testes conseguimos demonstrar que o critério é valido.

Por fim, foi possível verificar que se $m = \sum_{i=0}^{n}(a+b)^i a_i$um número inteiro positivo escrito na base decimal, isto é, $a + b = 10$ com $a = p$, com p primo, $7 \leq p \leq 19$, m é divisível por $a = p$ desde que,$\sum_{i=1}^{n} b^i a_i + a_0$é divisível por $a = p$.

Esperamos que esse trabalho possa ser usado como inspiração para novos estudos nos critérios de divisibilidade para p primos em outros intervalos maiores, como por exemplo, $23 \leq p \leq 97$, visto que o critério que abordamos funciona também, mais fica inviável devido as potências$\sum_{i=1}^{n} b^i a_i + a_0$ficarem cada vez maior que o número dado.

REFERÊNCIAS

BEZERRA, N. **Teoria dos números um curso introdutório**. Belém, PA: Editaedi, 2018.

DANTE, L. R. **Matemática Dante**. São Paulo: Ática, 2005.

DOMINGUES, H. H. *et al.* **Álgebra moderna.** 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2018.

HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar, volume 5**. São Paulo: Atual, 2013.

HEFEZ, A. **Elementos de aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

IEZZI, G. *et al*. **Matemática**: ciências e aplicações. 2. ed. São Paulo: Saraiva, 2004. v. 2.

LIMA, E. L. *et al*. **A matemática do ensino médio, volume 2** . Rio de Janeiro: SBM, 1998.

MILIES, C.P.; COELHO, S.P. **Números uma introdução à matemática**. São Paulo: Edusp, 2001.

TOGNATO II, J.O. **O binômio de Newton**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Formação de Professores, Departamento de Matemática, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2013.