UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS-UFAL
CAMPUS ARAPIRACA
MATEMÁTICA-LICENCIATURA

GABRIEL DÓRIA DE MENDONÇA

FATORAÇÕES ESPECIAIS

ARAPIRACA
2023

Gabriel Dória de Mendonça

Fatorações especiais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao corpo docente do curso de Matemática da Universidade Federal de Alagoas - UFAL, Campus Arapiraca, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Eben Alves da Silva

Arapiraca
2023

Universidade Federal de Alagoas – UFAL
Campus Arapiraca
Biblioteca Setorial *Campus* Arapiraca - BSCA

M539f Mendonça, Gabriel Dória de
Fatorações especiais [recurso eletrônico] / Gabriel Dória de Mendonça. – Arapiraca, 2023.
39 f.: il.

Orientador: Prof. Me. Eben Alves da Silva.
Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Alagoas, *Campus* Arapiraca, Arapiraca, 2023.
Disponível em: Universidade Digital (UD) / RD- BSCA– UFAL (*Campus* Arapiraca).
Referências: f. 39.

1. Fatoração polinomial. 2. Fatorações especiais. 3. Cruzadinha simples. 4. Cruzadinha dupla. 5. Cruzadinha dupla especial. I. Silva, Eben Alves da. II. Título.

CDU 51

Bibliotecário responsável: Nestor Antonio Alves Junior
CRB-4 / 1557

Gabriel Dória de Mendonça

Fatorações especiais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas - UFAL, Campus Arapiraca.

Data de Aprovação: 15/12/2023

Banca Examinadora

Documento assinado digitalmente
gov.br
EBEN ALVES DA SILVA
Data: 02/02/2024 18:14:59-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Eben Alves da Silva
Universidade Federal de Alagoas-UFAL
Campus Arapiraca
(Orientador)

Documento assinado digitalmente
gov.br
JOSE DA SILVA BARROS
Data: 05/02/2024 10:00:10-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. José da Silva Barros
Universidade Federal de Alagoas-UFAL
Campus Arapiraca
(Examinador)

Documento assinado digitalmente
gov.br
WAGNER OLIVEIRA COSTA FILHO
Data: 09/02/2024 22:47:21-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Wagner Oliveira Costa Filho
Universidade Federal de Alagoas-UFAL
Campus Arapiraca
(Examinador)

Dedico este trabalho à minha mãe, Rosiene Dória de Mendonça (in memoriam) que sempre me apoiou em busca do meu sonho de ser professor. Gratidão por tudo mãe.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho é dedicado primeiramente ao autor e consumador da fé, Jesus, pela dávida da vida e do conhecimento, pois sem ele nada poderia ser feito. Em segundo ponto, gostaria de ofertar este trabalho a meu pai José Valmir e a minha mãe Rosiene Dória, mulher de coração imenso, que foi chamada por Deus durante o meu processo de graduação e que os olhos brilhavam quando falava: "Meu filho é professor de matemática". A minha companheira e noiva Maria Eduarda, um presente que a UFAL me deu no primeiro período, pelo carinho e ajuda durante todos os momentos. A toda família, pelo apoio imensurável em busca desse sonho. A meus companheiros de gradução: Luís, Jonas, Jaelson, Luan, Ruan, Karla, entre outros. Pelo apoio nos momentos de estudo e pelas boas risadas enquanto almoçávamos no RU. Ao professor Eben pela orientação deste trabalho e pela sua humildade que sempre foi sua marca desde que o conheci. Aos professores José Barros, Moreno e Ornan Felipe pela amizade e pela didática excelente, sempre me espelho em vocês. Meu muito obrigado aos demais amigos e professores que participaram dessa trajetória.

“Tudo flui, para fora e para dentro; tudo tem suas marés; todas as coisas se levantam e caem; a oscilação do pêndulo se manifesta em tudo; a medida da oscilação à direita é a medida da oscilação à esquerda; o ritmo compensa."

O Caibalion

RESUMO

Este trabalho consiste em apresentar métodos versáteis para fatoração de polinômios. Nesse sentido, será exposta uma pequena história da álgebra, diversos personagens importantíssimos para a gênese, evolução e manutenção, a fim de tornar o mais singelo e compreensível as fatorações de polinômios, processo pelo qual utilizamos para fatorar um certo polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdot + a_2 x^2 + a_1 x + x_0$ como um produto de fatores entre dois ou mais polinômios. Dessa forma, abordaremos inicialmente os casos de fatorações mais conhecidas no ensino básico e depois desenvolveremos os casos de fatorações especiais que será o objetivo do nosso trabalho. A partir dessas fatorações, será desenvolvido três tipos de fatorações os quais os quais chamamos de critérios da Cruzadinha Simples, Dupla e Dupla Especial (Mista). Cada uma delas será usada como uma ferramenta fortíssima para decompor polinômios em fatores de dois ou mais polinômios, sem que precisamos recorrer ao cálculo das raízes ou as fatorações básicas.

Palavras-chave: fatorações especiais; cruzadinha simples; cruzadinha dupla; cruzadinha dupla especial.

ABSTRACT

This work consists of presenting versatile methods for factoring polynomials. In this sense, a small history of algebra will be exposed, several very important characters for the genesis, evolution and maintenance, in order to make the factorizations of polynomials as simple and understandable as possible, a process by which we use to represent a certain polynomial $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdot + a_2x^2 + a_1x + x_0$ as a product of factors between two or more polynomials. Therefore, we will initially address the most well-known factorization cases in basic education and then develop the special factorization cases that will be the objective of our work. From these factorizations, three factorization criteria will be developed, which are: Simple Cross, Double Cross and Special Double Cross. Each of them will be used as a very strong tool to decompose polynomials into factors of two or more polynomials, without having to resort to calculating the roots or basic factorizations.

Keywords: special factorizations; simple crossword; double cross; special double cross.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A história da matemática é repleta por inúmeras descobertas e avanços nas mais variadas áreas, e a fatoração e os produtos notáveis não são uma exceção. Esses dois conceitos são os pilares para fundamentação do estudo da álgebra vista hoje no ensino básico e têm raízes que remontam a séculos atrás. É notável que diversos matemáticos contribuíram com seus trabalhos para esta famosa área da matemática, conhecida como álgebra, todavia, cabe citar nesta introdução aqueles que são indispensáveis para nosso estudo.

Os primeiros indícios das técnicas de fatoração utilizadas remontam aos tempos antigos, quando os matemáticos babilônicos já as utilizavam para resolver problemas cotidianos que envolviam equações quadráticas. Muitos textos babilônicos antigos mostram que resolver uma equação quadrática na sua forma completa não constituía uma dificuldade para esse povo, tendo em vista que tinham desenvolvido operações algébricas flexíveis, ou seja, conseguiam aplicar sem problemas o princípio da equivalência das equações, somavam ou multiplicavam ambos os membros das equações por quantidades iguais com o intuito de remover frações ou eliminar fatores. Boyer (1991, p.22) é enfático ao afirmar: “a solução de equações quadráticas e cúbicas na Mesopotâmia é um feito notável, admirável tanto pelo alto nível de habilidade técnica quanto pela maturidade e flexibilidade dos conceitos algébricos envolvidos”.

Por volta do século III a.C, o matemático grego Euclides instaura em sua obra “Os Elementos” as principais bases não só da geometria plana, mas também para o estudo dos produtos notáveis. Euclides foi o primeiro a utilizar na prática o conceito de fator comum a partir da propriedade distributiva: $ab+ac+ad = a \cdot (b + c + d)$, fato que consta nos capítulos V e VII de seu livro. O quadrado da soma de dois termos e a diferença de quadrados aparecem de forma evidente na proposição 3 e 4 do capítulo II nos “Os Elementos”, só que escritos em linguagem geométrica da seguinte forma “caso uma linha reta seja cortada, ao acaso, o retângulo contido pela reta toda e por um dos segmentos é igual a ambos, o retângulo contido pelos segmentos e o quadrado sobre o predito segmento” e “Caso uma linha reta seja cortada, ao acaso, o quadrado sobre a reta toda é igual aos quadrados sobre os segmentos e também duas vezes o retângulo contido pelos segmentos” que são maneiras “formais” para dizer que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ e $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

O terceiro personagem que contribuiu de igual valor para o desenvolvimento da álgebra foi Al-Khwarizmi, no seu livro “Al-Jabr”, no qual introduz o conceito de álgebra e apresenta várias técnicas de fatoração de polinômios que seriam fundamentais para o desenvolvimento desse campo posteriormente (Boyer, p.166). Problemas como quadrados e raízes iguais e números, quadrados e números iguais a raízes e raízes e números iguais a quadrados, que são descrições para o processo de completar quadrados que abordamos hoje no ensino básico, foram descritos nos capítulos IV, V e VI. Em "Al-Jabr" também encontramos operações com binômios, descritos no livro como $(10 + 1) \cdot (10 - 1)$ e $(10 + x) \cdot (10 - x)$.

Outros matemáticos como Cardano, Fermat, Descartes, Euler e Gauss contribuíram de igual modo na manutenção e estruturação da álgebra como ela é hoje. Este trabalho seria muito pequeno para descrever tamanha importância das suas contribuições em poucas páginas. Dessa forma, é necessário destacar a importância dos métodos de fatoração no desenvolvimento da matemática enquanto ciência e disciplina na educação básica. Neste trabalho de conclusão abordaremos não só os casos elementares de fatoração vistos no ensino básico, mas também apresentaremos novas técnicas de fatoração o qual chamaremos de fatorações especiais as quais são: cruzadinha simples, cruzadinha dupla e cruzadinha mista.

2 FATORAÇÕES ELEMENTARES

Neste capítulo, vamos abordar os casos elementares de produtos notáveis e fatoração de polinômios que são frequentemente ensinados no ensino básico. Esses conceitos são extremamente úteis para simplificar expressões e encontrar as raízes dos polinômios. Nesse sentido, foram utilizadas as seguintes referências para compor este capítulo (Lima, 1998), (Paiva, 1999) e (Dante, 2000).

Definição 2.1. (Fatoração por agrupamento ou "Evidência"): O agrupamento é um método pelo qual simplificamos uma expressão algébrica, agrupando os termos semelhantes (termos comuns) até obtermos a fatoração desejada.

Exemplo 2.1. Fatore $ax + by + bx + ay$

Solução:

$$\begin{aligned} ax + by + bx + ay &= ax + ay + bx + by \\ &= a \cdot (x + y) + b \cdot (x + y) \\ &= (a + b) \cdot (x + y) \end{aligned}$$

Exemplo 2.2. Fatore $12bx + 3by - 8x - 2y$

Solução:

$$\begin{aligned} 12bx + 3by - 8x - 2y &= 3b \cdot (4x + y) - 2 \cdot (4x + y) \\ &= (3b - 2) \cdot (4x + y) \end{aligned}$$

Proposição 2.1. *(Quadrado da Soma e da Diferença de Dois Termos): O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro, mais ou menos o dobro do produto dos dois termos, mais o quadrado do segundo termo.*

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} (a \pm b)^2 &= (a \pm b) \cdot (a \pm b) \\ &= a^2 \pm ab \pm ab + b^2 \end{aligned}$$

Portanto, $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ □

Exemplo 2.3. Efetue $(2x+3)^2$

Solução:

$$\begin{aligned}(2x+3)^2 &= (2x)^2 + 2\cdot(2x)\cdot(3) + (3)^2 \\ &= 4x^2 + 12x + 9\end{aligned}$$

Exemplo 2.4. Efetue $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2$

Solução:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 &= \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{y}\right) + \left(\frac{1}{y}\right)^2 \\ &= \frac{1}{x^2} - \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2}\end{aligned}$$

Exemplo 2.5. Efetue $(a^m - 2^n)^2$

Solução:

$$\begin{aligned}(a^m - 2^n)^2 &= (a^m)^2 - 2\cdot(a^m)\cdot(2^n) + (2^n)^2 \\ &= a^{2m} - 2^{n+1}\cdot a^m + 2^{2n} \\ &= a^{2m} - 2^{n+1}a^m + 2^{2n}\end{aligned}$$

Proposição 2.2. *(Quadrado da Soma com três termos): O quadrado da soma de três termos é igual a soma dos quadrados de cada um dos três termos mais o dobro da soma dos produtos tomados dois a dois.*

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\cdot(ab+ac+bc)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (a+b+c)\cdot(a+b+c) \\ &= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2 \\ &= (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2\,(ab+ac+bc)\end{aligned}$$

□

Observação 2.1. De modo análogo teríamos que $(a-b-c)^2 = a^2+b^2+c^2+2\cdot(bc-ab-ac)$

Proposição 2.3. *(Produto da Soma pela Diferença): O produto da soma de dois termos pela diferença entre eles é igual ao quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo.*

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot(a-b) &= a^2-ab+ab-b^2\\ &= a^2-b^2\end{aligned}$$

□

Observação 2.2. Podemos tomar esse caso e generalizar para um binômio da soma pela diferença com potência $(a^m+b^n)\cdot(a^m-b^n) = a^{2m}-b^{2n}$

Proposição 2.4. *(Generalização do produto da soma pela diferença para uma potência n): O produto da diferença pela soma das potências de dois termos em progressão geométrica é igual a diferença entre quadrados com a potência consecutiva.*

$$(a-b)\cdot(a+b)\cdot(a^2+b^2)\cdot(a^4+b^4)\cdot\ \ldots\cdot(a^{2n}+b^{2n}) = a^{2^{n+1}}-b^{2^{n+1}}$$

Demonstração. Vamos considerar o primeiro membro da expressão acima pela letra E, assim

$$\begin{aligned}E &= (a-b)\cdot(a+b)\cdot\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(a^4+b^4\right)\cdot\ \ldots\cdot\left(a^{2n}+b^{2n}\right)\\ &= \left(a^2-b^2\right)\cdot\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(a^4+b^4\right)\cdot\ \ldots\cdot\left(a^{2n}+b^{2n}\right)\\ &= \left(a^4-b^4\right)\cdot\left(a^4+b^4\right)\cdot\ \ldots\cdot\left(a^{2n}+b^{2n}\right)\\ &= \left(a^8-b^8\right)\cdot\ \ldots\cdot\left(a^{2n}+b^{2n}\right)\\ &= a^{2^{n+1}}-b^{2^{n+1}}\end{aligned}$$

□

Exemplo 2.6. Efetue

$$(x-2)\cdot(x+2)\cdot\left(x^2+4\right)\cdot\ldots\cdot\left(x^{2m}+2^{2m}\right)$$

Solução:

$$\begin{aligned} E &= (x-2)\cdot(x+2)\cdot\left(x^2+4\right)\cdot\ldots\cdot\left(x^{2m}+2^{2m}\right) \\ &= \left(x^2-4\right)\cdot\left(x^2+4\right)\cdot\ldots\cdot\left(x^{2m}+2^{2m}\right) \\ &= \left(x^4-16\right)\cdot\left(x^4+16\right)\cdot\ldots\cdot\left(x^{2m}+2^{2m}\right) \\ &= x^{2^{m+1}}-2^{2^{m+1}} \end{aligned}$$

Portanto, $(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x^2+4)\cdot\ldots\cdot(x^{2m}+2^{2m}) = x^{2^{m+1}}-2^{2^{m+1}}$

Proposição 2.5. *(Identidades de Stevin para Dois Termos):*

a) Produto entre dois binômios soma

$$(x+a)\cdot(x+b) = x^2+(a+b)\,x+ab$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} (x+a)\cdot(x+b) &= x^2+bx+ax+ab \\ &= x^2+(a+b)\,x+ab \end{aligned}$$

□

b) Produto entre um binômio soma e um binômio diferença

$$(x+a)\cdot(x-b) = x^2+(a-b)\,x-ab$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} (x+a)\cdot(x-b) &= x^2-bx+ax-ab \\ &= x^2+(a-b)\,x-ab \end{aligned}$$

□

c) Produto entre dois binômios diferença

$$(x-a)\cdot(x-b) = x^2-(a+b)\,x+ab$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}(x-a)\cdot(x-b) &= x^2-bx-ax+ab\\ &= x^2-(a+b)\,x+ab\end{aligned}$$

□

Exemplo 2.7. Efetue $(x+2)\cdot(x+3)$

Solução:

$$\begin{aligned}(x+2)\cdot(x+3) &= x^2+(2+3)\,x+2\cdot 3\\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

Exemplo 2.8. Efetue $(x-abc)\cdot(x-bcd)$

Solução:

$$\begin{aligned}(x-abc)\cdot(x-bcd) &= x^2-(abc+bcd)\,x+abc\cdot bcd\\ &= x^2-(a+d)\,bcx+ab^2c^2d\end{aligned}$$

Observação 2.3. Verifica-se que as generalizações proposições vistas acima são dadas por

$$(x^m+a)\cdot(x^m+b) = x^{2m}+(a+b)\,x^m+ab$$

$$(x^m+a)\cdot(x^m-b) = x^{2m}+(a-b)\,x^m-ab$$

$$(x^m-a)\cdot(x^m-b) = x^{2m}-(a+b)\,x^m+ab$$

Proposição 2.6. *(Cubo da Soma de Dois Termos): O cubo da soma de dois termos é igual ao primeiro termo elevado ao cubo mais três vezes o primeiro termo elevado ao quadrado vezes o segundo termo, mais três vezes o primeiro termo vezes o segundo termo elevado ao quadrado, mais o segundo termo elevado ao cubo.*

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2\cdot(a+b)\\ &= \left(a^2+2ab+b^2\right)\cdot(a+b)\\ &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

□

Observação 2.4. De modo análogo, faríamos para o cubo da diferença de dois termos cuja identidade seria $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Exemplo 2.9. Efetue $(3x+2)^3$

Solução:

$$\begin{aligned}(3x+2)^3 &= (3x)^3+3\cdot(3x)^2\cdot 2+3\cdot 3x\cdot 2^2+2^3\\ &= 27x^3+54x^2+36x+8\end{aligned}$$

Exemplo 2.10. Efetue $(x-2)^3$

Solução:

$$\begin{aligned}(x-2)^3 &= x^3-3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2-2^3\\ &= x^3-6x^2+12x-8\end{aligned}$$

Proposição 2.7. *(Identidades de Cauchy para soma e para diferença): Trata-se de escrever o cubo da soma ou diferença de um número de modo mais cômodo, é chamada identidade de Cauchy.*

$$(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab\cdot(a+b) \text{ e } (a-b)^3 = a^3-b^3-3ab\cdot(a-b)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\ &= a^3+b^3+3ab\,(a+b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\\ &= a^3-b^3-3ab\,(a-b)\end{aligned}$$

□

Exemplo 2.11. Desenvolva $(m+10)^3$

Solução: Podemos escrever

$$\begin{aligned}
(m+10)^3 &= m^3+10^3+3\cdot m\cdot 10\cdot(m+10)\\
&= m^3+1000+30m\,(m+10)\\
&= m^3+30m^2+300m+1000
\end{aligned}$$

Proposição 2.8. *(A soma de dois cubos):*

$$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
a^3+b^3+3a^2b+3ab^2 &= (a+b)^3\\
a^3+b^3 &= (a+b)^3-3a^2b-3ab^2\\
&= (a+b)^3-3ab\cdot(a+b)\\
&= (a+b)\left[(a+b)^2-3ab\right]\\
&= (a+b)\cdot\left(a^2+2ab+b^2-3ab\right)\\
&= (a+b)\cdot\left(a^2-ab+b^2\right)
\end{aligned}$$

□

Observação 2.5. De modo análogo teríamos que $a^3-b^3=(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$

Exemplo 2.12. Desenvolva x^3-8y^3

Solução:

$$\begin{aligned}
x^3-8y^3 &= (x)^3-(2y)^3\\
&= (x-2y)\cdot\left(x^2+2xy+4y^2\right)
\end{aligned}$$

3 FATORAÇÕES ESPECIAIS

Neste capítulo, serão abordados os principais métodos de fatoração especial conhecidos como cruzadinha simples, cruzadinha dupla e cruzadinha dupla especial. Essas técnicas de fatoração são ferramentas fortíssimas que usam soma e produto para encontrar os binômios e trinômios que são fatores de um polinômio. As referências utilizadas neste capítulo foram (Araújo, 2022) e (Sabbatino, 2021).

1. Cruzadinha Simples

Esse método é útil para fatorar uma expressão algébrica do segundo grau em x de uma forma mais simples sem recorrer ao cálculos das raízes do polinômio. A forma geral que temos para uma cruzadinha simples são

- Uma variável simples: $p(x) = Ax^2 + Bx + C$
- Uma variável generalizada: $p(x) = Ax^{2m} + Bx^m + C$
- Duas variáveis simples: $p(x) = Ax^2 + Bx \cdot y + Cy^2$
- Duas variáveis generalizadas: $p(x) = Ax^{2m} + Bx^m \cdot y^n + Cy^{2n}$

Para fatorar esses tipos de polinômios precisamos realizar três passos:

Passo 1: Decompor as duas extremidades do polinômio em monômios, cujos coeficientes são divisores naturais dos coeficientes extremos.

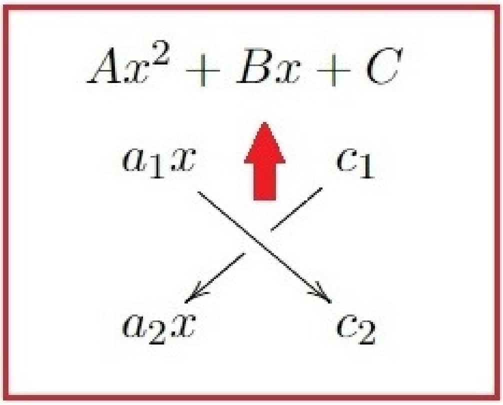
Passo 2: Multiplica-se em **cruz** os monômios decompostos de modo que o resultado seja o termo central do polinômio.

Passo 3: Cada linha forma um fator

Para observar melhor a aplicação desta técnica de fatoração observe a figura seguir o método referente a cruzadinha simples:

a) Uma variável simples:

Figura 1 – Cruzadinha simples



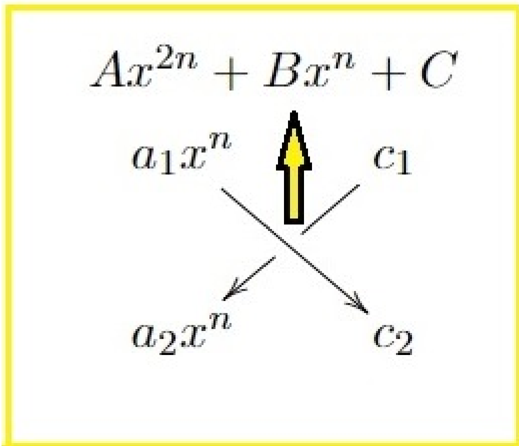
Fonte: O autor (2023).

A operação $(a_1x) \cdot (c_2) + (a_2x) \cdot (c_1)$ deve resultar no termo central Bx, ou seja,

$$(a_1x) \cdot (c_2) + (a_2x) \cdot (c_1) = Bx$$

b) Uma variável generalizada:

Figura 2 – Uma variável generalizada

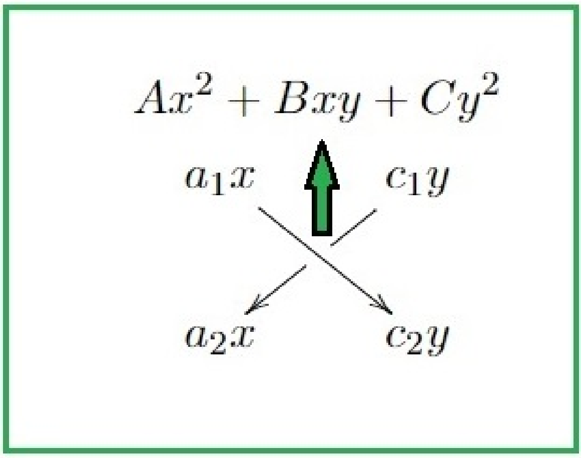


Fonte: O autor (2023).

A operação $(a_1x^n) \cdot (c_2) + (a_2x^n) \cdot (c_1)$ deve resultar no termo central Bx^n, ou seja,

$$(a_1x^n) \cdot (c_2) + (a_2x^n) \cdot (c_1) = Bx^n$$

Figura 3 – Duas variáveis simples



Fonte: O autor (2023).

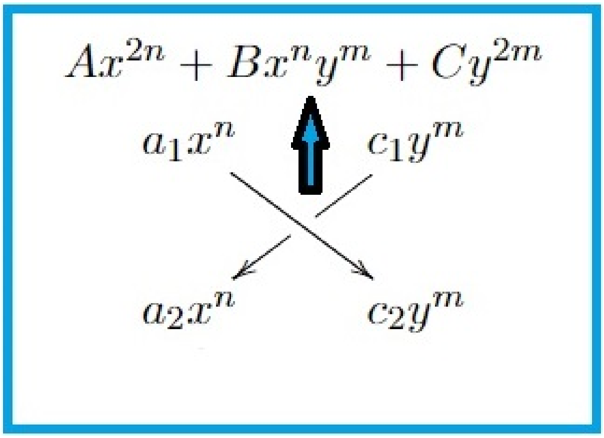
c) Duas Variáveis Simples

A operação $(a_1x) \cdot (c_2y) + (a_2x) \cdot (c_1y)$ deve resultar no termo central Bxy, ou seja,

$$(a_1x) \cdot (c_2y) + (a_2x) \cdot (c_1y) = Bxy$$

d) Duas Variáveis Generalizadas

Figura 4 – Duas variáveis generalizadas



Fonte: O autor (2023).

A operação $(a_1x^n) \cdot (c_2y^n) + (a_2x^m) \cdot (c_1y^n)$ deve resultar no termo central Bx^ny^m, ou seja,

$$(a_1x^n) \cdot (c_2y^n) + (a_2x^m) \cdot (c_1y^n) = Bx^ny^m$$

A seguir vamos apresentar os exemplos sobre fatorações especiais.

Exemplo 3.1. Fatore $6x^2 + 7x + 2$

Solução: Vamos seguir o passo a passo

Passo 1: Perceba que os divisores naturais de 2 são 1 e 2, então eles serão os extremos da direita, colocaremos os divisores positivos, caso não dê o termo central, colocaremos os divisores negativos. Para os extremos da direita temos as combinações $(1$ e $6)$; $(2$ e $3)$; $(3$ e $2)$; $(6$ e $1)$.

Passo 2: Agora, vamos efetuar os produtos e somar os resultados

$$6x^2 + 7x + 2$$
$$\begin{array}{cc} x & 1 \\ 6x & 2 \end{array}$$
$$x \cdot 2 = 2x \text{ e } 6x \cdot 1 = 6x$$
$$\text{Soma} = 2x + 6x = 8x$$

$$6x^2 + 7x + 2$$
$$\begin{array}{cc} 2x & 1 \\ 3x & 2 \end{array}$$
$$2x \cdot 2 = 4x \text{ e } 3x \cdot 1 = 3x$$
$$\text{Soma} = 4x + 3x = 7x$$

$$6x^2 + 7x + 2$$
$$\begin{array}{cc} 3x & 1 \\ 2x & 2 \end{array}$$
$$3x \cdot 2 = 6x \text{ e } 2x \cdot 1 = 2x$$
$$\text{Soma} = 6x + 2x = 8x$$

$$6x^2 + 7x + 2$$
$$\begin{array}{cc} 6x & 1 \\ x & 2 \end{array}$$
$$6x \cdot 2 = 12x \text{ e } x \cdot 1 = x$$
$$\text{Soma} = 12x + x = 13x$$

Passo 3: Note que a segunda combinação resulta no termo central. Assim, temos a linha "2 e 1"e "3 e 2", ou seja, $6x^2 + 7x + 2 = (2x + 1)(3x + 2)$.

Exemplo 3.2. Fatore $x^2 + x - 2$

Solução: Vamos resolver o passo a passo

Passo 1: Perceba que os divisores naturais de 2 são 1 e 2, então eles serão os extremos da direita. Para os extremos da esquerda temos somente a combinação $(1$ e $1)$.

Passo 2: Vamos efetuar os produtos, notando que ele é negativo e somar os resultados:

$$x^2 + x - 2$$

$$\begin{array}{ccc} x & & -1 \\ & & \\ x & & 2 \end{array}$$

$$x \cdot 2 = 2x \text{ e } x \cdot (-1) = -x$$
$$\text{Soma} = 2x - x = x$$

Passo 3: Assim, a combinação do termo central será "1 e -1"e "1 e 2", ou seja,

$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

Exemplo 3.3. Fatore $x^{6n} + 12x^{3n} + 11$

Solução: Vamos seguir o passo a passo

Passo 1: Note que os divisores naturais de 11 são 1 e 11, então teremos a combinação da direita $(1$ e $11)$. Já para a esquerda temos $(1$ e $1)$.

Passo 2: Vamos efetuar os produtos, notando que ele é positivo, é conveniente usar os termos positivos devido ao fato do termo central ser positivo:

$$x^{6n} + 12x^{3n} + 11$$

$$\begin{array}{ccc} x^{3n} & & 1 \\ & & \\ x^{3n} & & 11 \end{array}$$

$$x^{3n} \cdot 11 = 11x^{3n} \text{ e } x^{3n} \cdot 1 = x^{3n}$$
$$\text{Soma} = 11x^{3n} + x^{3n} = 12x^{3n}$$

Passo 3: Assim, as linhas "1 e 1"e "1 e 11" formam os fatores, ou seja,

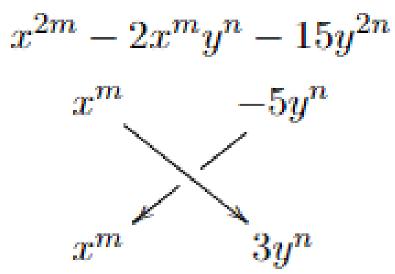
$$x^{6n} + 12x^{3n} + 11 = (x^{3n} + 1)(x^{3n} + 11)$$

Exemplo 3.4. Fatore $x^{2m} - 2x^m y^n - 15y^{2n}$

Solução: Vamos seguir o passo a passo

Passo 1: Note que os divisores naturais de 15 são 1, 3, 5 e 15, então temos as combinações da direita $(1$ e $15)$; $(3$ e $5)$; $(5$ e $3)$; $(15$ e $1)$. Para a esquerda temos $(1$ e $1)$.

Passo 2: Vamos efetuar os produtos, notando que ele é negativo, e somar os resultados:



$$x^m \cdot 3y^n = 3x^m y^n \text{ e } x^m \cdot (-5y^n) = -5x^m y^n$$
$$\text{Soma} = 3x^m y^n - 5x^m y^n = -2x^m y^n$$

Passo 3: Logo, as linhas "1 e -5"e "1 e 3" formam os fatores, ou seja,

$$x^{2m} - 2x^m y^n - 15y^{2n} = (x^m - 5y^n)(x^m + 3y^n)$$

2. Cruzadinha Dupla

Esse critério de fatoração é uma ferramenta fortíssima que usa soma e produto para encontrar os trinômios que serão os fatores de um polinômio. A forma geral, para que tenhamos uma cruzadinha dupla é:

- Duas variáveis simples: $p(x) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$
- Duas variáveis generalizadas: $p(x) = Ax^{2n} + Bx^n y^m + Cy^{2m} + Dx^n + Ey^m + F$

Para fatorá-la, vamos realizar quatro passos:

Passo 1: Aplica-se a cruzadinha simples para o trinômio $Ax^2 + Bxy + Cy^2$.

Passo 2: Aplica-se a cruzadinha simples para o trinômio $Cy^2 + Ey + F$.

Passo 3: Aplica-se a cruzadinha simples para os extremos, para a verificação do termo Dx, não utilizado.

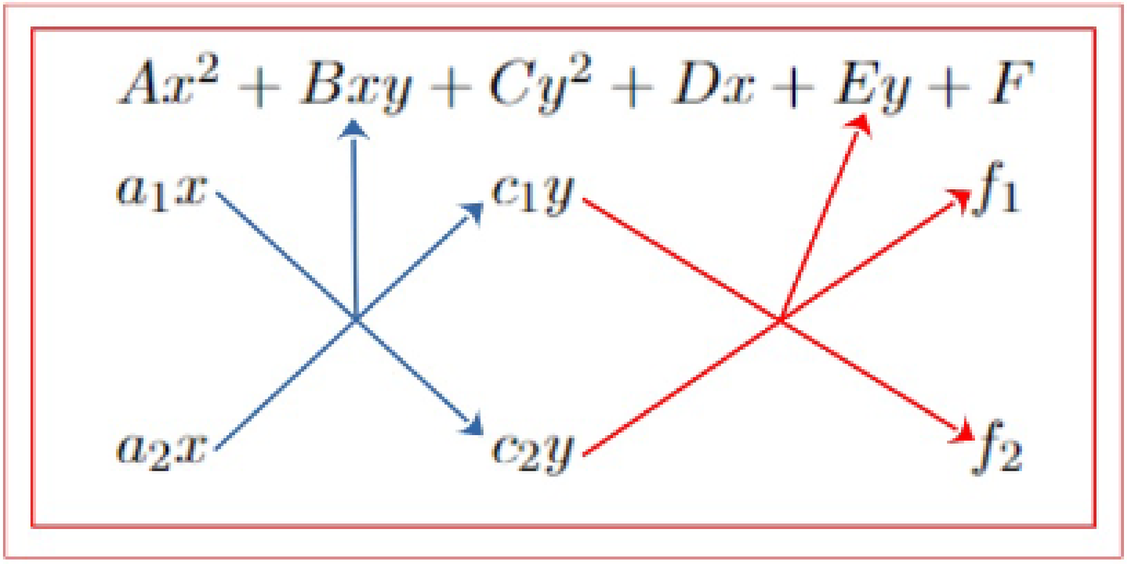
Passo 4: Cada linha forma um fator

Observação 3.1. O grau das partes literais do polinômio a ser fatorado deve ser colocado em ordem decrescente. Se faltar algum termo, devemos completar com zeros.

Veja o esquema abaixo:

Duas variáveis simples

Figura 5 – Cruzadinha dupla duas variáveis simples



Fonte: O autor (2023).

A operação $(a_1x) \cdot (c_2y) + (a_2x) \cdot (c_1y)$ deve resultar no termo central Bxy, ou seja,

$$(a_1x) \cdot (c_2y) + (a_2x) \cdot (c_1y) = Bxy$$

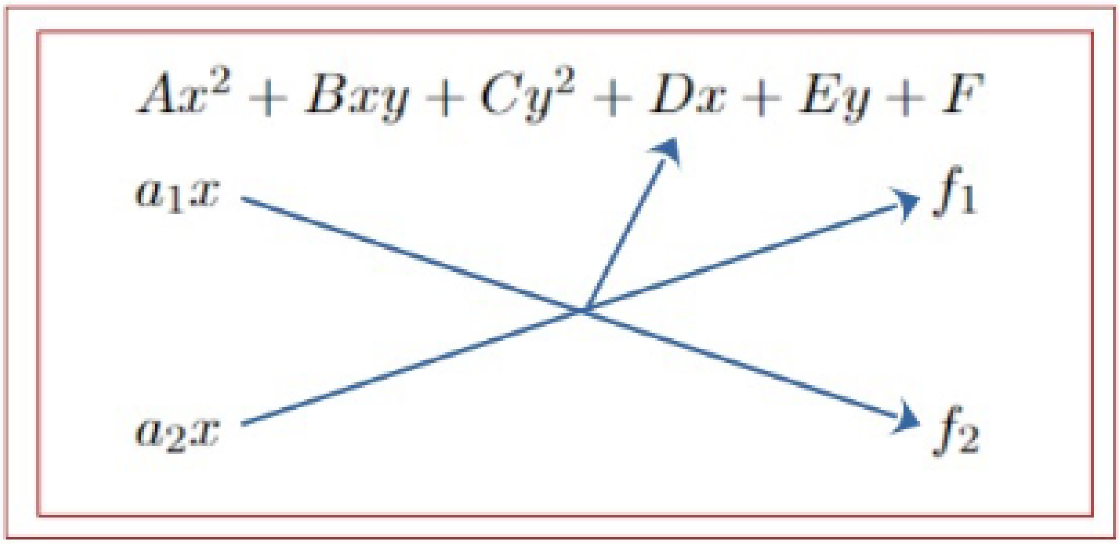
A operação $(c_2y) \cdot (f_1) + (c_1y) \cdot (f_2)$ deve resultar no termo central Ey, ou seja,

$$(c_2y) \cdot (f_1) + (c_1y) \cdot (f_2) = Ey$$

A operação $(a_1x) \cdot (f_2) + (a_2x) \cdot (f_1)$ deve resultar no termo central Dx, ou seja,

$$(a_1x) \cdot (f_2) + (a_2x) \cdot (f_1) = Dx$$

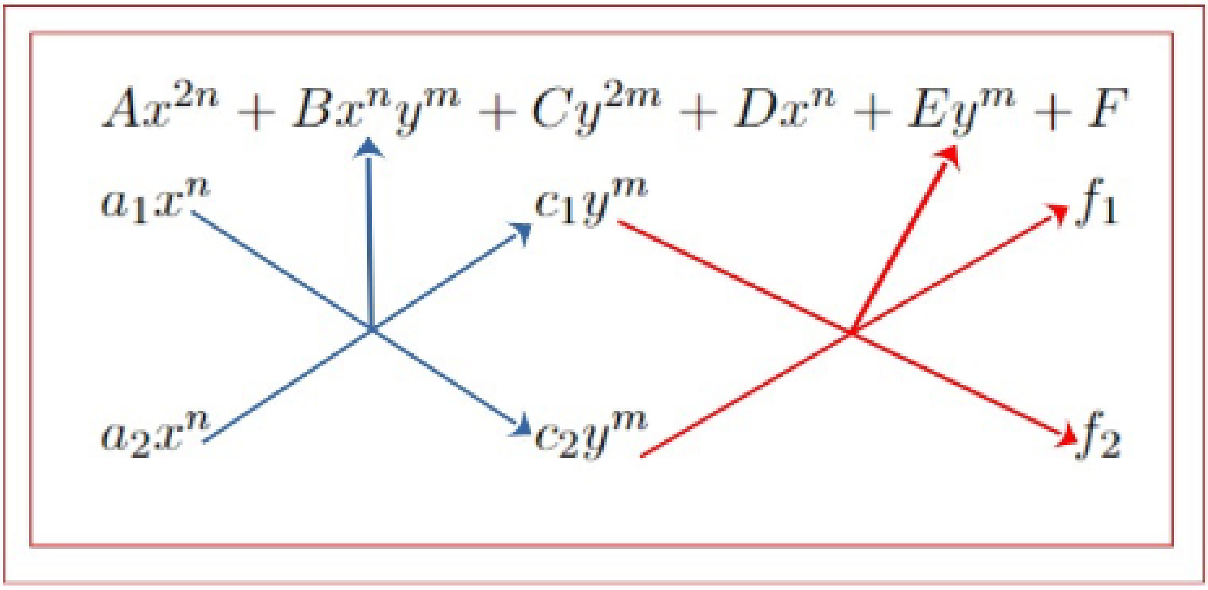
Figura 6 – Cruzadinha dupla duas variáveis simples



Fonte: O autor (2023).

Duas variáveis Generalizadas

Figura 7 – Cruzadinha dupla duas variáveis generalizadas



Fonte: O autor (2023).

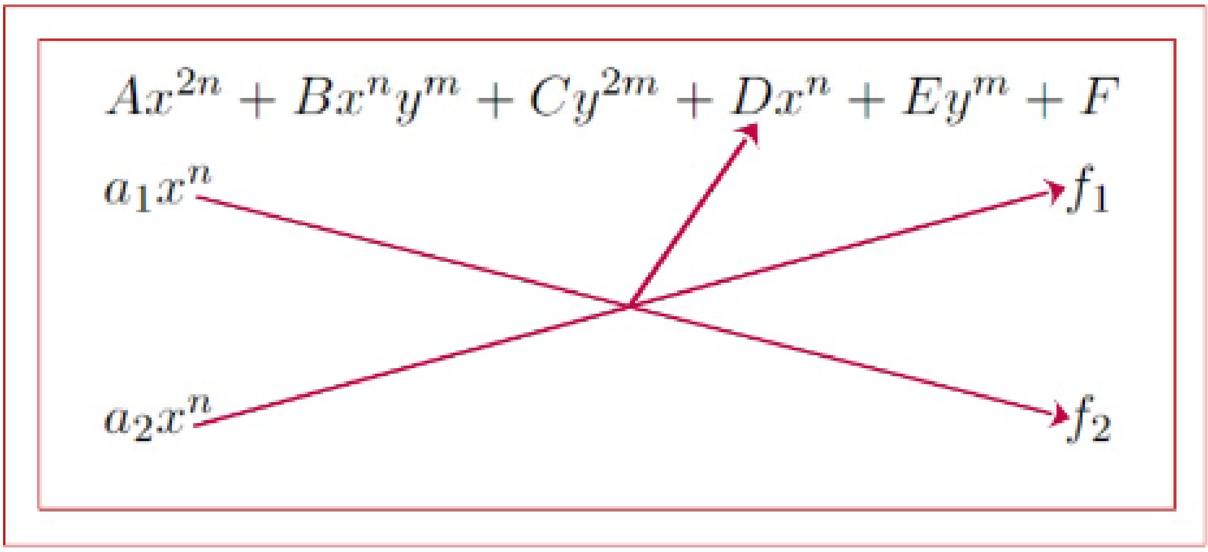
A operação $(a_1x^n) \cdot (c_2y^m) + (a_2x^n) \cdot (c_1y^m)$ deve resultar no termo central Bx^ny^m, ou seja,

$$(a_1x^n) \cdot (c_2y^m) + (a_2x^n) \cdot (c_1y^m) = Bx^ny^m$$

A operação $(c_1y^m) \cdot (f_2) + (c_2y^m) \cdot (f_1)$ deve resultar no termo central Ey^m, ou seja,

$$(c_1y^m) \cdot (f_2) + (c_2y^m) \cdot (f_1) = Ey^m$$

Figura 8 – Cruzadinha dupla duas variáveis generalizadas



Fonte: O autor (2023).

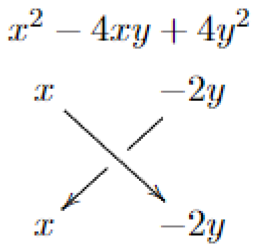
A operação $(a_1x^n) \cdot (f_2) + (a_2x^n) \cdot (f_1)$ deve resultar no termo central Dx^n, ou seja,

$$(a_1x^n) \cdot (f_2) + (a_2x^n) \cdot (f_1) = Dx^n$$

Exemplo 3.5. Fatore $x^2 - 4xy + 4y^2 + 3x - 6y$

Solução: Vamos resolver o passo a passo

Passo 1: Aplica-se cruzadinha simples para o trinômio $x^2 - 4xy + 4y^2$.



$$x \cdot (-2y) = -2xy \text{ e } x \cdot (-2y) = -2xy$$
$$\text{Soma} = -2xy - 2xy = -4xy$$

Passo 2: Aplica-se cruzadinha simples para o trinômio $4y^2 - 6y + 0$:

$$\begin{array}{c} 4y^2 - 6y + 0 \\ \begin{array}{cc} -2y & 0 \\ & \\ -2y & 3 \end{array} \end{array}$$

$$-2y \cdot 3 = -6y \text{ e } -2y \cdot 0 = 0$$
$$\text{Soma} = -6y + 0 = -6y$$

Passo 3: Aplica-se cruzadinha simples para os extremos para verificação do termo $3x$, não utilizado:

$$\begin{array}{c} x^2 + 3x + 0 \\ \begin{array}{cc} x & 0 \\ & \\ x & 3 \end{array} \end{array}$$

$$3 \cdot x = 3x \text{ e } x \cdot 0 = 0$$
$$\text{Soma} = 3x + 0 = 3x$$

Passo 4: Cada linha forma um fator:

$$\begin{array}{l} x^2 - 4xy + 4y^2 + 3x - 6y + 0 \\ \begin{array}{cccl} x & -2y & 0 & \Leftarrow \text{Linha 1} \\ & & & \\ x & -2y & 3 & \Leftarrow \text{Linha 2} \end{array} \end{array}$$

Portanto, $x^2 - 4xy + 4y^2 + 3x - 6y = (x - 2y)(x - 2y + 3)$

Exemplo 3.6. Fatore $2x^4 + 17x^2y^2 + 21y^4 + 8x^2 + y^2 - 10$

Solução: Vamos resolver o passo a passo

Passo 1: Aplica-se cruzadinha simples para o trinômio $2x^4 + 17x^2y^2 + 21y^4$.

$$2x^4 + 17x^2y^2 + 21y^4$$

$$\begin{array}{cc} 2x^2 & 3y^2 \\ x^2 & 7y^2 \end{array}$$

$$2x^2 \cdot 7y^2 = 14x^2y^2 \text{ e } x^2 \cdot 3y^2 = 3x^2y^2$$
$$\text{Soma} = 14x^2y^2 + 3x^2y^2 = 17x^2y^2$$

Passo 2: Aplica-se cruzadinha simples para o trinômio $21y^4 + y^2 - 10$.

$$21y^4 + y^2 - 10$$

$$\begin{array}{cc} 3y^2 & -2 \\ 7y^2 & 5 \end{array}$$

$$3y^2 \cdot 5 = 15y^2 \text{ e } 7y^2 \cdot (-2) = -14y^2$$
$$\text{Soma} = 15y^2 - 14y^2 = y^2$$

Passo 3: Aplica-se cruzadinha simples para os extremos para verificação do termo $8x^2$, não utilizado:

$$2x^4 + 8x^2 - 10$$

$$\begin{array}{cc} 2x^2 & -2 \\ \\ x^2 & 5 \end{array}$$

$$2x^2 \cdot 5 = 10x^2 \text{ e } x^2 \cdot (-2) = -2x^2$$
$$\text{Soma} = 10x^2 - 2x^2 = 8x^2$$

Passo 4: Cada linha forma um fator:

$$2x^4 + 17x^2y^2 + 21y^4 + 8x^2 + y^2 - 10$$

$$\begin{array}{ccccl} 2x^2 & 3y^2 & & -2 & \Leftarrow \text{Linha 1} \\ \\ x^2 & 7y^2 & & 5 & \Leftarrow \text{Linha 2} \end{array}$$

Portanto, $2x^4 + 17x^2y^2 + 21y^4 + 8x^2 + y^2 - 10 = (2x^2 + 3y^2 - 2)(x^2 + 7y^2 + 5)$.

3. Cruzadinha Dupla Especial ou Mista

Nesse critério de fatoração denominado de "cruzadinha dupla especial"aprenderemos a fatorar polinômios de quarto grau e usaremos também as fatorações anteriores, porém com uma pequena diferença. A forma geral para que tenhamos uma "cruzadinha dupla especial"é:

- Uma variável simples: $p(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$
- Uma variável generalizada: $p(x) = Ax^{4m} + Bx^{3m} + Cx^{2m} + Dx^m + E$

Para fatorá-la, vamos realizar quatro passos a seguir:

Passo 1: Aplica-se a cruzadinha simples para os coeficientes extremos. Nessa aplicação já vamos contabilizar o termo central.

Passo 2: Fazemos a diferença entre o termo central e o resultado já contabilizado do Passo 1.

Passo 3: Aplica-se cruzadinha simples com o resultado do Passo 02 para verificação dos termos ainda não utilizados.

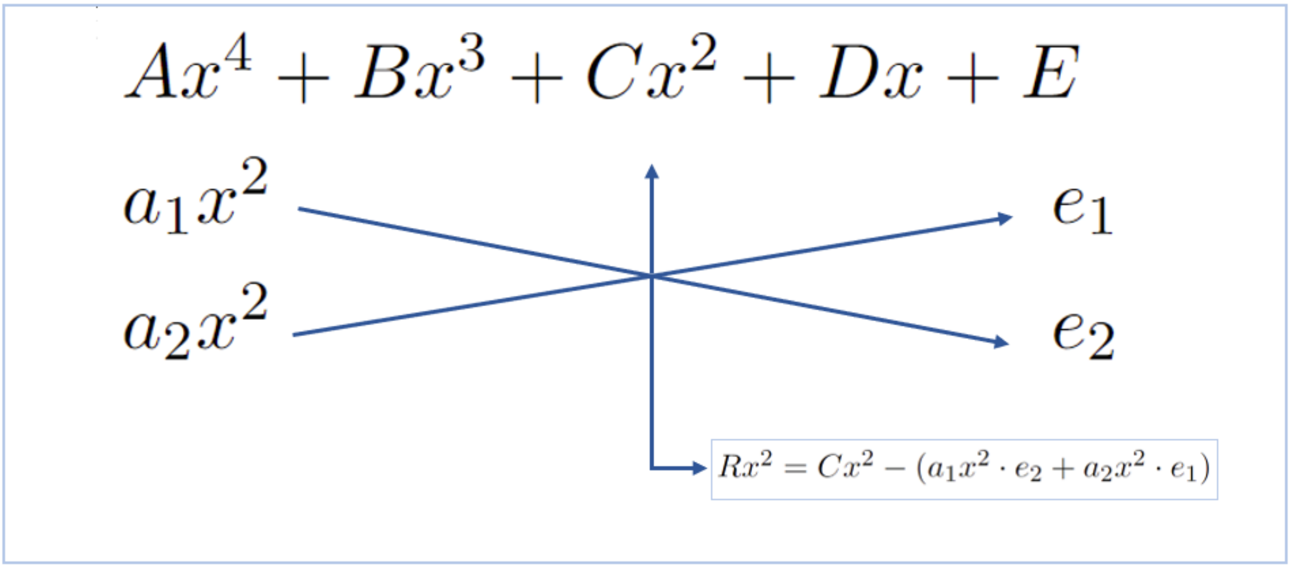
Passo 4: Cada linha forma um fator

Observação 3.2. Sempre deve ser colocar o polinômio a ser fatorado em ordem decrescente de expoente. Se faltar algum termo, devemos completar com zeros.

Veja o esquema a seguir:

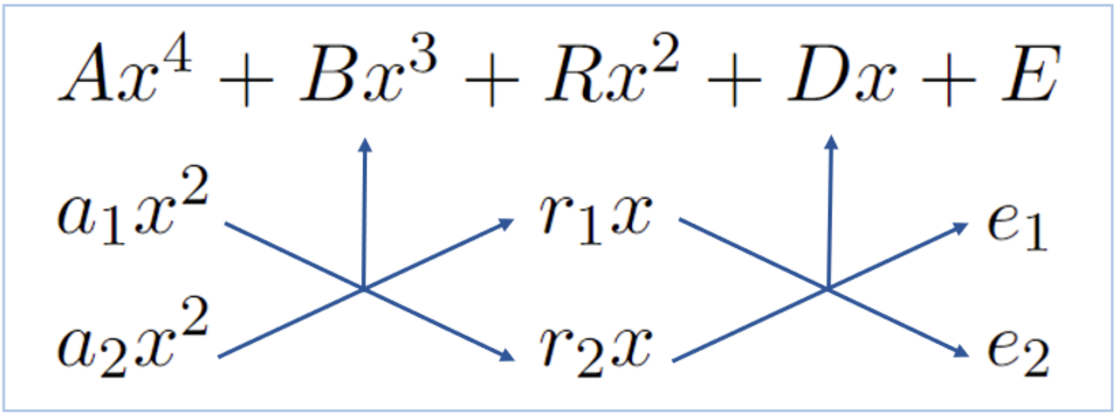
Uma Variável Simples

Figura 9 – Cruzadinha dupla especial ou mista uma variável simples



Fonte: O autor (2023).

Figura 10 – Cruzadinha dupla especial ou mista uma variável simples



Fonte: O autor (2023).

A operação $(a_1x^2) \cdot (e_2) + (a_2x^2) \cdot (e_1)$ deve resultar no termo central Cx^2, ou seja,

$$(a_1x^2) \cdot (e_2) + (a_2x^2) \cdot (e_1) = Cx^2$$

A operação $Rx^2 = Cx^2 - (a_1x^2 \cdot e_2 + a_2x^2 \cdot e_1)$ deve resultar no termo central de referência para a cruzadinha simples.

A operação $(a_1x^2)(r_2x) + (a_2x^2)(r_1x)$ deve resultar no termo central Bx^3, ou seja,

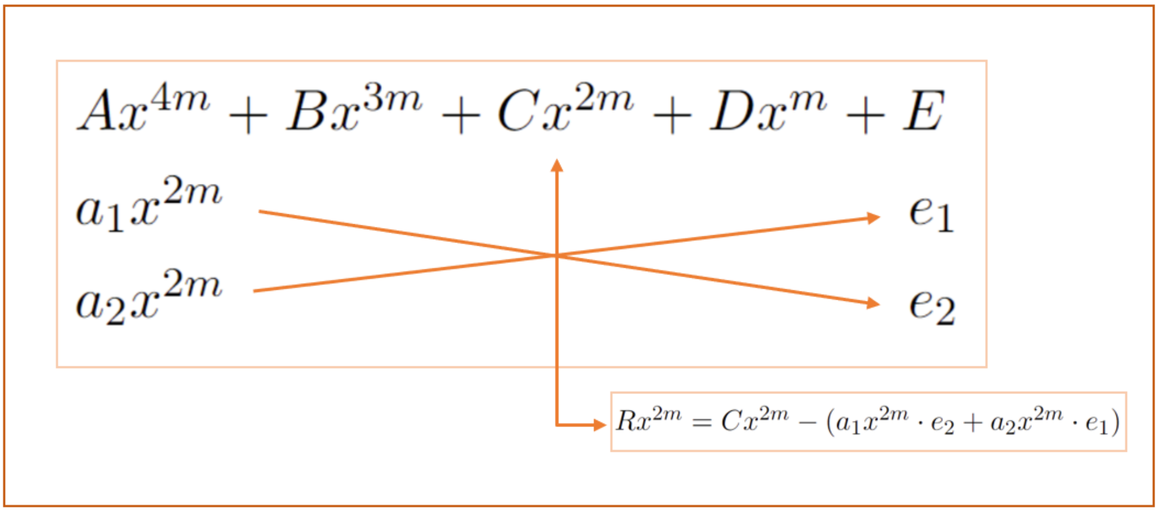
$$(a_1x^2)(r_2x) + (a_2x^2)(r_1x) = Bx^3$$

A operação $(r_2x) \cdot e_1 + (r_1x) \cdot e_2$ deve resultar no termo Dx, ou seja,

$$(r_2x) \cdot e_1 + (r_1x) \cdot e_2 = Dx$$

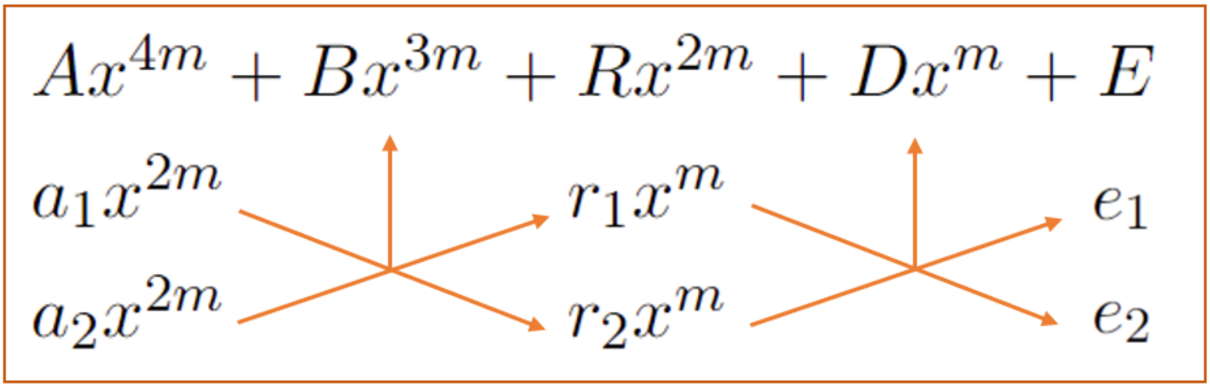
Uma Variável Generalizada

Figura 11 – Cruzadinha dupla especial ou mista uma variável generalizada



Fonte: O autor (2023).

Figura 12 – Cruzadinha dupla especial ou mista uma variável generalizada



Fonte: O autor (2023).

A operação $(a_1x^{2m})(e_2) + (a_2x^{2m})(e_1)$ deve resultar no termo central Cx^{2m}, ou seja,

$$(a_1x^{2m})(e_2) + (a_2x^{2m})(e_1) = Cx^{2m}$$

A operação $Rx^{2m} = Cx^{2m} - (a_1x^{2m} \cdot e_2 + a_2x^{2m} \cdot e_1)$ será o termo central de referência para a cruzadinha simples.

A operação $(a_1x^{2m}) \cdot (r_2x^m) + (a_2x^{2m}) \cdot (r_1x^m)$ deve resultar no termo central Bx^{3m}, ou seja,

$$(a_1x^{2m}) \cdot (r_2x^m) + (a_2x^{2m}) \cdot (r_1x^m) = Bx^{3m}$$

A operação $(r_2x^m) \cdot e_1 + (r_1x^m) \cdot e_2$ deve resultar no termo Dx^m, ou seja,

$$(r_2x^m) \cdot e_1 + (r_1x^m) \cdot e_2 = Dx^m$$

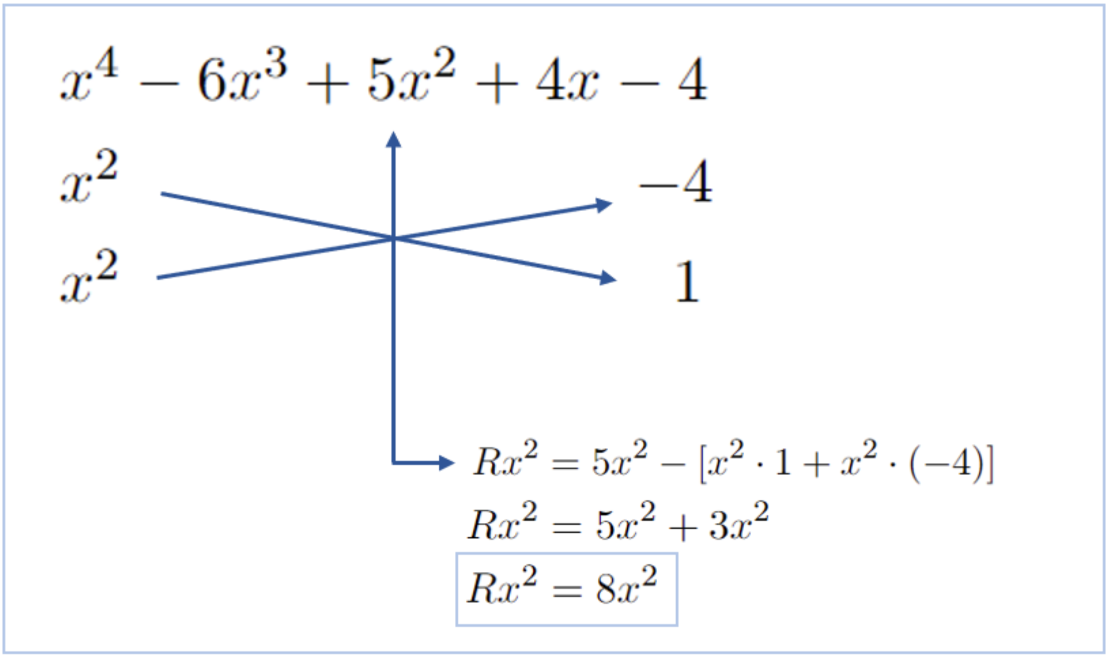
Exemplo 3.7. Fatore $x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 4x - 4$

Solução: Vamos resolver o passo a passo

Passo 1: Aplica-se cruzadinha simples para os coeficientes extremos. Nessa aplicação já iremos contabilizar uma parte do termo central.

Passo 2: Fazemos a diferença entre o termo central e o resultado já contabilizado no Passo 1.

Figura 13 – Cruzadinha dupla especial ou mista uma variável simples



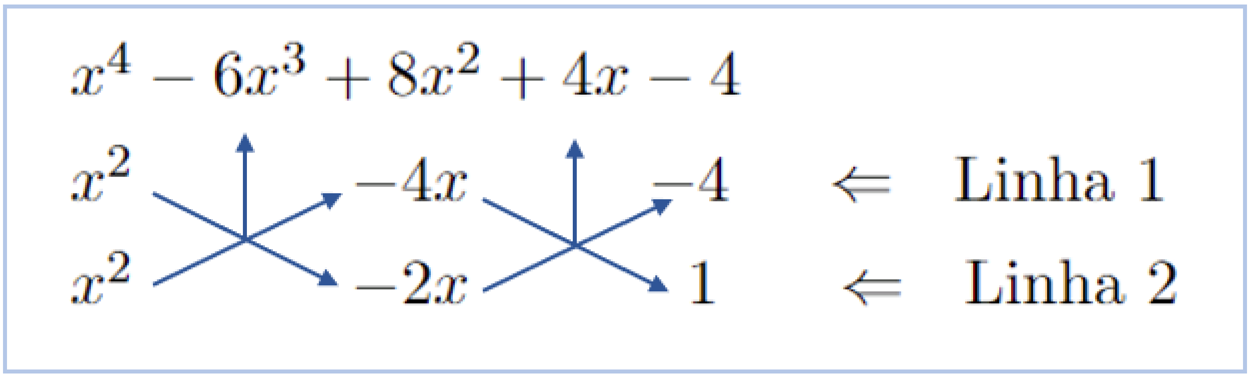
Fonte: O autor (2023).

Passo 3: Aplica-se cruzadinha simples com o resultado do Passo 2 para a verificação dos termos ainda não utilizados:

Passo 4: Cada linha forma um fator, ou seja,

$$x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 4x - 4 = (x^2 - 4x - 4)(x^2 - 2x + 1)$$

Figura 14 – Cruzadinha dupla especial ou mista uma variável simples



Fonte: O autor (2023).

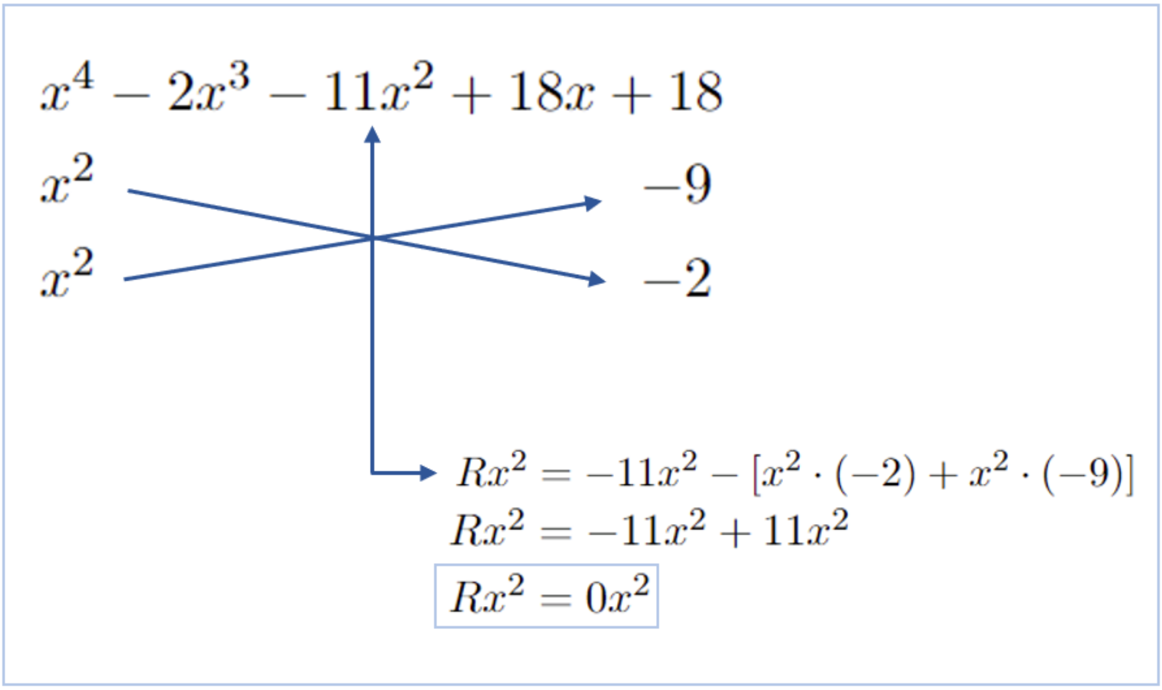
Exemplo 3.8. Fatore $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 18x + 18$

Solução: Vamos resolver o passo a passo

Passo 1: Aplica-se cruzadinha simples para os coeficientes extremos. Nessa aplicação já iremos contabilizar uma parte do termo central.

Passo 2: Fazemos a diferença entre o termo central e o resultado já contabilizado no Passo 1.

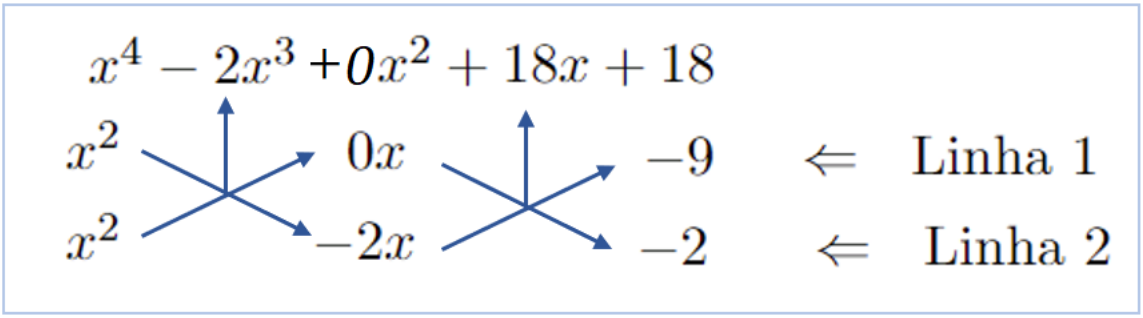
Figura 15 – Cruzadinha dupla especial ou mista uma variável simples



Fonte: O autor (2023).

Passo 3: Aplica-se cruzadinha simples com o resultado do Passo 2 para a verificação dos termos ainda não utilizados:

Figura 16 – Cruzadinha dupla especial ou mista uma variável simples



Fonte: O autor (2023).

Passo 4: Cada linha forma um fator, ou seja,

$$x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 18x + 18 = (x^2 - 9)(x^2 - 2x - 2)$$

Vamos resolver uma questão do ITA, (Instituto Tecnológico da Aeronáutica), utilizando Cruzadinha Dupla Especial (Mista) e Cruzadinha Simples para fatorar um polinômio do quarto grau. Nesse sentido, vamos verificar um pouco da aplicabilidade do método em uma questão de um exame de seleção, como também averiguar a eficácia diante das fatorações mais elementares.

Exemplo 3.9. (ITA - 2011) - Com respeito à equação polinomial $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$ é correto afirmar que

a) Todas as raízes estão em $\mathbb{Q}$.

b) Uma única raiz está em $\mathbb{Z}$ e as demais estão em $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

c) Duas raízes estão em $\mathbb{Q}$ e as demais têm parte imaginária não-nula.

d) Não é divisível por $2x - 1$.

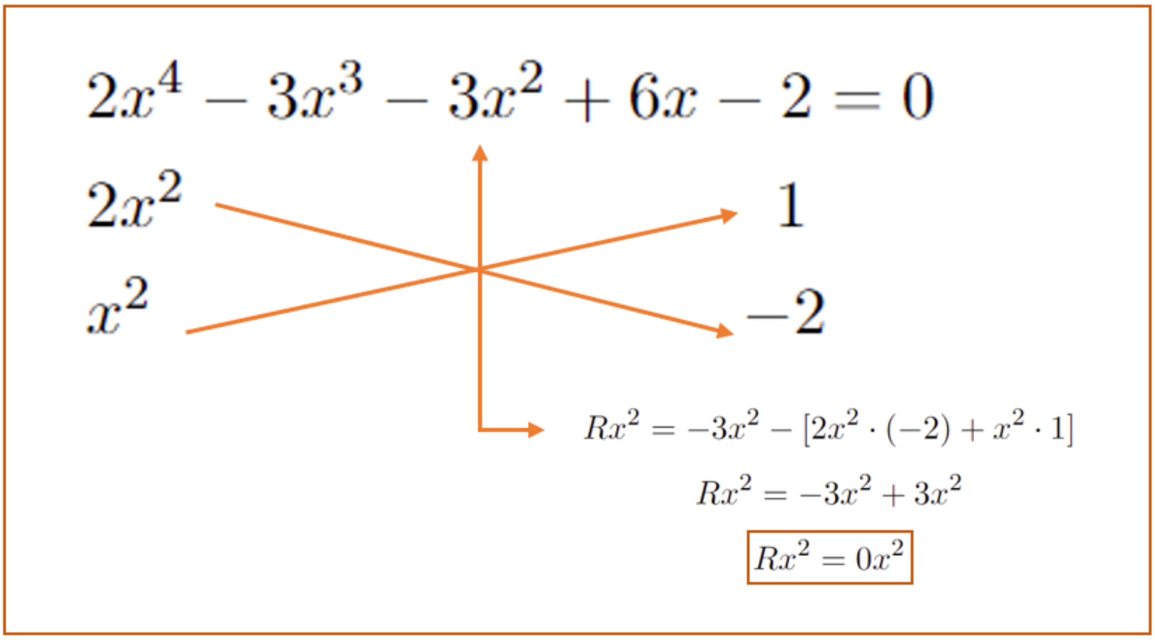
e) Uma única raiz está em $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ e pelo menos uma das demais está em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Solução: Vamos resolver o passo a passo

Passo 1: Aplica-se cruzadinha simples para os coeficientes extremos. Nessa aplicação já iremos contabilizar uma parte do termo central.

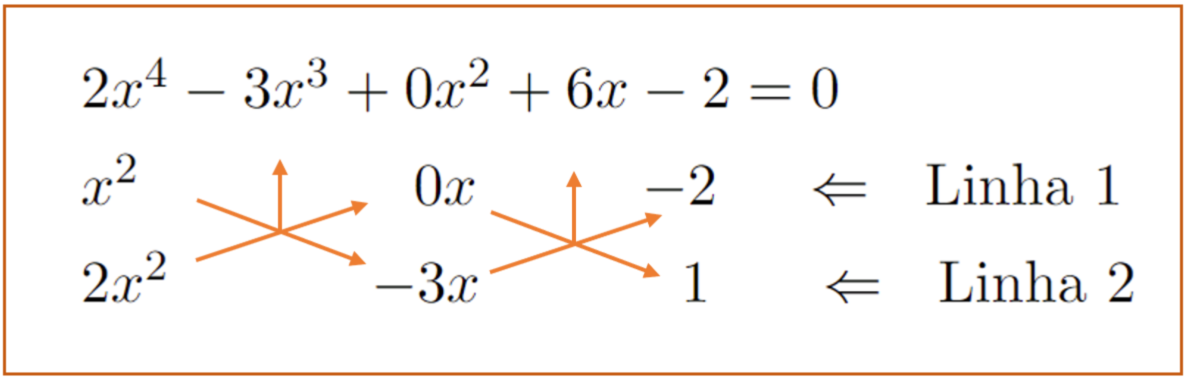
Passo 2: Fazemos a diferença entre o termo central e o resultado já contabilizado no Passo 1.

Figura 17 – Cruzadinha dupla especial ou mista uma variável simples



Fonte: O autor (2023).

Figura 18 – Cruzadinha dupla especial ou mista uma variável simples



Fonte: O autor (2023).

Passo 3: Aplica-se cruzadinha simples com o resultado do Passo 2 para a verificação dos termos ainda não utilizados:

Passo 4: Temos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 &= 0 \\ (x^2 - 2) \cdot (2x^2 - 3x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Passo 5: Aplicando diferença de quadrados em $(x^2 - 2) = (x - \sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2})$.

Passo 6: Vamos aplicar cruzadinha simples no termo $2x^2 - 3x + 1$

$$2x^2 - 3x + 1$$

$$\begin{array}{cc} 2x & -1 \\ x & -1 \end{array}$$

$$2x \cdot (-1) = -2x \text{ e } x \cdot (-1) = -x$$
$$\text{Soma} = -2x - x = -3x$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 &= 0 \\ (x^2 - 2) \cdot (x^2 - 3x + 1) &= 0 \\ (x - \sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (2x - 1) \cdot (x - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, as raízes do polinômio $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$ são dadas por: $S = \left\{\pm\sqrt{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$ e, alternativa correta é a **letra E**.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os métodos de fatoração especial, incluindo a cruzadinha simples, dupla e dupla especial, demonstram uma eficácia notável na resolução de problemas de fatoração em comparação com os métodos tradicionais. A abordagem inovadora dessas técnicas proporciona uma maneira mais simples e direcionada de decompor expressões algébricas complexas, resultando em soluções mais eficientes e rápidas.

Comparativamente, quando contrastado com métodos de fatoração tradicionais, os métodos das cruzadinhas apresentam uma vantagem em termos de eficiência e simplicidade. A abordagem direta e estruturada dessas técnicas permite aos estudantes resolverem problemas de fatoração de maneira mais intuitiva, economizando tempo e reduzindo a probabilidade de erros.

Assim, considerando a eficácia demonstrada e a praticidade oferecida, os métodos de fatoração com cruzadinha simples, dupla e dupla especial emergem como ferramentas fortemente valiosas em relação aos métodos tradicionais, destacando-se como uma abordagem efetiva na resolução de problemas algébricos mais complexos.

Vale ressaltar também que esses métodos podem ser usado em problemas que aparecem em olímpiadas de matemática, bem como nos vestibulares do ITA e IME.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, Miller Dias de. **Os segredos da álgebra para IME, ITA e Olimpíadas**. Fortaleza: Vestseller, 2022.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 1974.

DANTE, L. R. **Matemática:** contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2000.

IEZZI, G. **Complexos, polinômios, equações**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 6

LIMA, E. L. *et al*. **A matemática do ensino médio**. vol 3. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998.

PAIVA, M. R. **Matemática**. São Paulo: Editora Moderna, 1999. v. 1.

SABBATINO, Â. **Tópicos de álgebra:** escolas técnicas e militares. Rio de Janeiro: XYZ, 2021.