UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CAMPUS ARAPIRACA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

EDICLAUDIO DA SILVA LIMA

EXPLORANDO AS RELAÇÕES ENTRE FUNÇÕES POLINOMIAIS E PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

ARAPIRACA-AL
2025

EDICLAUDIO DA SILVA LIMA

EXPLORANDO AS RELAÇÕES ENTRE FUNÇÕES POLINOMIAIS E PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do *Campus* Arapiraca da Universidade Federal de Alagoas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Eben Alves da Silva.

Arapiraca-AL
2025

Universidade Federal de Alagoas – UFAL
Campus Arapiraca
Biblioteca Setorial *Campus* Arapiraca - BSCA

L732e Lima, Ediclaudio da Silva
Explorando as relações entre funções polinomiais e progressões aritméticas [recurso eletrônico] / Ediclaudio da Silva Lima. – Arapiraca, 2025.
48 f.: il.

Orientador: Prof. Me. Eben Alves da Silva.
Coorientador: Prof. Dr. Moreno Pereira Bonutti.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Alagoas, *Campus* Arapiraca, Arapiraca, 2025.
Disponível em: Universidade Digital (UD) – UFAL (*Campus* Arapiraca).
Referências: f. 47-48.

1. Matemática. 2. Função. 3. Sequências numéricas. I. Silva, Eben Alves da. II. Bonutti, Moreno Pereira. III. Título.

CDU 51

Bibliotecário responsável: Márcio Thiago dos Santos Albuquerque
CRB - 4 / 2052

EDICLAUDIO DA SILVA LIMA

Explorando as Relações entre Funções Polinomiais e Progressões Aritméticas

Dissertação apresentada à banca examinadora como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática do *Campus* Arapiraca da Universidade Federal de Alagoas, aprovada em 05 de Maio de 2025.

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
EBEN ALVES DA SILVA
Data: 06/06/2025 16:14:18-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Eben Alves da Silva
Universidade Federal de Alagoas - UFAL
Orientador

Documento assinado digitalmente
MORENO PEREIRA BONUTTI
Data: 05/06/2025 09:41:26-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Moreno Pereira Bonutti
Universidade Federal de Alagoas - UFAL
Coorientador

Documento assinado digitalmente
IURY RAFAEL DOMINGOS DE OLIVEIRA
Data: 30/06/2025 10:07:14-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Iury Rafael Domingos de Oliveira
Universidade Federal de Alagoas - UFAL
Examinador

Documento assinado digitalmente
WAGNER XAVIER RIBEIRO
Data: 23/06/2025 09:18:17-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Wagner Xavier Ribeiro
Instituto Federal de Alagoas - IFAL
Examinador

Dedico à minha esposa, Katiane, e ao meu filho, Thiago.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo seu filho, Jesus Cristo, e pela força que tem me dado nesta longa caminhada da vida, além de ter me ajudado a enfrentar todos os obstáculos pelos quais passei.

À minha família querida: minha esposa, Katiane Maria, por todo o amor que tem me dado e ao meu filho amado Thiago Luíz.

Ao meu orientador, Prof. Me. Eben Alves da Silva, e ao meu coorientador, Prof. Dr. Moreno Pereira Bonutti, agradeço por toda a força e apoio nesta jornada. Que Deus os abençoe!

Ao Prof. Dr. Iury Rafael Domingos de Oliveira e ao Prof. Dr. Wagner Xavier Ribeiro por aceitarem compor a banca avaliadora.

Aos meus colegas do curso pela parceria durante essa trajetória.

RESUMO

O estudo das sequências numéricas enfrenta desafios que impactam diretamente o desenvolvimento do raciocínio lógico, especialmente na visualização de padrões. Os alunos são convidados a pensar e investigar formas de resolver problemas, deduzir fórmulas, generalizar e analisar propriedades. A elaboração deste trabalho foi motivada pela competência específica 5 de Matemática e suas Tecnologias, bem como pela habilidade EM13MAT507 da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que aborda o estudo das relações entre a progressão aritmética e a função afim. Assim, dando continuidade ao estudo das conexões entre funções polinomiais e sequências de números reais, esta monografia tem como principal objetivo responder às seguintes perguntas: qual é a sequência de números reais que se relaciona com a função quadrática? Qual é a relação entre funções polinomiais e progressões aritméticas? As respostas a essas perguntas culminam na demonstração dos teoremas de caracterização.

Palavras-chave: sequências; progressão aritmética; função

ABSTRACT

The study of numerical sequences faces challenges that directly impact the development of logical reasoning, especially in visualizing patterns. Students are encouraged to think and investigate ways to solve problems, deduce formulas, generalize, and analyze properties. The preparation of this work was motivated by the specific competence 5 in Mathematics and its Technologies, as well as skill EM13MAT507 from the National Common Curricular Base (BNCC), which addresses the study of the relationships between arithmetic progression and linear functions. Thus, continuing the exploration of the connections between polynomial functions and sequences of real numbers, this monograph aims primarily to answer the following questions: What is the sequence of real numbers that relates to the quadratic function? What is the relationship between polynomial functions and arithmetic progressions? The answers to these questions culminate in the demonstration of characterization theorems.

Keywords: sequences; arithmetic progression; function

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 8

2 DEFINIÇÕES E RESULTADOS PRELIMINARES 10
2.1 Sequências numéricas 10
2.2 Progressões aritméticas 11
2.3 Função afim e função quadrática 12

3 PROGRESSÃO ARITMÉTICA E FUNÇÃO AFIM 14
3.1 Caracterização da função afim 17

4 PROGRESSÃO ARITMÉTICA DE SEGUNDA ORDEM E FUNÇÃO QUADRÁTICA 22
4.1 Caracterização da função quadrática 29
4.1.1 Progressão aritmética e polinômios 32

5 EXEMPLOS E APLICAÇÕES. 35
5.1 Progressão aritmética de segunda ordem 35
5.1.1 O problema da bola que pula 35
5.1.2 Movimento uniformemente variado (M.U.V) 36
5.1.3 Jogo salto da rã 39
5.2 Progressões aritméticas e funções polinomiais 40

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS 46

REFERÊNCIAS 47

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como objetivo principal estudar as relações entre as progressões aritméticas e as funções polinomiais. A relação entre a função afim e a progressão aritmética, por exemplo, é mencionada na competência específica 5, mais especificamente, na habilidade EM13MAT507 da Base Nacional Comum Curricular - "Identificar e associar sequências numéricas (PA) a funções afins de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas"(Brasil, 2018, p. 534).

Essa habilidade e o conhecimento adquirido nas aulas do PROFMAT motivaram-me a pensar se existe alguma sequência de números reais que se relaciona com a função quadrática ou, ainda, se essa ideia pode ser generalizada. Isto é, dada uma função polinomial de ordem n, pode-se relacionar essa função com uma sequência de números reais? A resposta para essas perguntas é sim! No caso da função quadrática, abordaremos a relação dessa função com a progressão aritmética de segunda ordem e, generalizando, mostraremos que uma função polinomial de ordem n pode ser relacionada com uma progressão aritmética de ordem n. Em resumo, um dos objetivos deste trabalho é provar os seguintes resultados:

- Uma função é afim se, e somente se, transforma toda progressão aritmética em uma progressão aritmética.
- Uma função é quadrática se, e somente se, transforma toda progressão aritmética em uma progressão aritmética de segunda ordem.
- Uma sequência é uma progressão aritmética de ordem k se, e somente se, seu termo geral é um polinômio de grau k em n.

Portanto, como as funções podem ser aplicadas em outras áreas do conhecimento e podem ser relacionadas a outros conteúdos dentro da própria Matemática, este trabalho proporciona ao leitor, ao se deparar com problemas que envolvem funções, a oportunidade de pensar ou investigar uma outra forma de solução para esses problemas, baseada nas progressões aritméticas.

No que se refere à organização do trabalho:

- No Capítulo 2, apresentamos alguns conceitos e resultados preliminares, necessários para o entendimento da dissertação.
- Nos Capítulos 3 e 4, desenvolvemos os conteúdos de progressão aritmética de primeira e segunda ordem, relacionando-os com as funções afim e quadrática, respectivamente. Além disso, no Capítulo 4, apresentamos um teorema de caracterização da função quadrática, mostrando que uma função é quadrática se, e somente se, a imagem de toda progressão aritmética, por uma função quadrática, for uma progressão aritmética de segunda ordem.

- Finalmente, no Capítulo 5, apresentamos alguns exemplos e aplicações da relação entre a função quadrática e a progressão aritmética de segunda ordem.

2 DEFINIÇÕES E RESULTADOS PRELIMINARES

2.1 Sequências numéricas

Neste capítulo, abordaremos o conceito de sequências numéricas, pois queremos relacionar sequências com funções polinomiais. Esse conceito é indispensável para o entendimento do trabalho. O leitor deve estar habituado às noções básicas de conjuntos numéricos e funções reais.

Definição 2.1. Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que associa a cada número natural n um número real $x(n)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, a sua imagem $x(n)$ por x será representada por x_n. Escreveremos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots)$ para representar a sequência x (Lima, 2013).

Uma sequência notável que pode ser citada como exemplo é a **sequência de Fibonacci**, em homenagem ao matemático italiano Leonardo de Pisa (1170-1250). Essa sequência aparece em seu livro *Liber Abaci* e está relacionada com a contagem de casais de coelhos, da seguinte forma:

O problema dos coelhos de Leonardo de Pisa pode ser apresentado da seguinte maneira: supondo que os coelhos tenham vida eterna e que cada casal de coelho gere um novo casal a partir do segundo mês de vida, esse casal também dará origem a um novo par, e assim sucessivamente, de mês em mês. Vejamos:

i) No 1º mês, temos um casal de coelhos que chamamos de C_1.

ii) No 2º mês, o casal C_1 acasala. Continuamos com 1 par de coelhos.

iii) No 3º mês, C_1 gera um par de coelhos C_2 e passamos a contar com dois casais nesse mês.

iv) No 4º mês, temos 3 pares, sendo o novo casal uma cria de C_1. Passamos, assim, a ter os casais C_1, C_2 e C_3.

v) No 5º mês, temos, além da cria de C_1, uma cria de C_2. Então, ficamos com 5 casais de coelho: C_1, C_2, C_3, C_4 e C_5.

vi) No 6º mês, além das crias de C_1 e C_2, temos uma cria de C_3 e então contamos com 8 casais: C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7 e C_8.

vii) No 7º mês, temos cria de C_1, C_2, C_3, C_4 e C_5, e obtemos 13 casais: C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}, e C_{13} e assim sucessivamente, obtendo a sequência $(1, 1,\ 2,\ 3,, 5,\ 8, \ldots)$ (Dante, 2016).

Portanto, o problema descrito acima pode ser relacionado com a sequência $(1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \ldots)$, conhecida como sequência de Fibonacci.

Figura 1 – Leonardo Fibonacci.

Fonte: Belini (2015)

2.2 Progressões aritméticas

Nesta monografia, as sequências que nos interessam estudar são as progressões aritméticas. Essas progressões podem ser definidas utilizando o operador linear Δx_n. Seja $x_n = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ uma sequência; o operador Δx_n relacionado a ela é a sequência $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$. Agora, faremos a definição de progressão aritmética.

Definição 2.2. Uma progressão aritmética de primeira ordem, também chamada de progressão aritmética não estacionária ou simplismente progressão aritmética, é uma sequência em que o operador Δx_n associado a ela é uma sequência constante e não nula (ou seja, uma sequência cujos termos não são todos iguais a zero). Além disso, a constante mencionada será chamada de **razão** da progressão aritmética e será indicada pela letra r. Dessa forma, as sequências $(3,\ 7,\ 11,\ 15,\ \ldots)$ e $(10,\ 7,\ 4,\ 1,\ \ldots)$ são progressões aritméticas de razão $r = 4$ e $r = -3$, respectivamente.

Além disso, as expressões para o termo geral x_n e soma dos n primeiros termos S_n de uma progressão aritmética são conhecidas no Ensino Médio e são dadas por:

$$x_n = x_1 + (n_1)r \qquad\qquad S_n = \frac{(x_1 + x_n) \cdot n}{2}$$

respectivamente.

Exemplo 1. A expressão para a soma dos n primeiros números naturais $1+2+3+\ldots+n$ pode ser calculada pela igualdade S_n, uma vez que $(1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n)$ é uma progressão aritmética com $x_1 = 1$ e $x_n = n$. Portanto:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{(x_1 + x_n) \cdot n}{2} \\ &= \frac{(1+n) \cdot n}{2} \\ &= \frac{n \cdot (n+1)}{2}) \end{aligned}$$

□

Por outro lado,

Definição 2.3. Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência cujo operador Δx_n é uma progressão aritmética de razão não nula. Dessa forma, a sequência $(3,\ 5,\ 11,\ 21,\ \ldots)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem, pois $\Delta x_n = (5-3=2,\ 11-5=6,\ 21-11=10,\ \ldots)$ é uma progressão aritmética de primeira ordem, cuja razão é $r = 4$ (Morgado; Carvalho, 2022).

Essas sequências são muito importantes para o desenvolvimento deste trabalho e, em breve, serão relacionadas às funções afim e quadrática, respectivamente, ambas estudadas no Ensino Médio. A definição de progressão aritmética pode ser generalizada da seguinte forma:

Definição 2.4. Uma progressão aritmética é dita de ordem n quando o operador diferença $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ for uma progressão aritmética de ordem $n-1$. Assim, a sequência $(9,\ 12,\ 17,\ 28,\ \ldots)$ é uma progressão aritmética de ordem 3, visto que $\Delta x_n = (12-9=3,\ 17-12=5,\ 28-17=11,\ \ldots)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem de acordo com a definição anterior.

Nesta monografia, estamos interessados em estudar as relações dessas progressões com as funções afim e quadrática que são definidas da seguinte maneira:

2.3 Função afim e função quadrática

Definição 2.5. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma $f(x) = ax + b$, onde a e b são constantes reais denominadas, respectivamente, coeficiente angular e coeficiente linear, é chamada de função afim. Assim, as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = -3x + 8$ e $g(x) = 5x + 9$ são exemplos de funções afim.

Definição 2.6. uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$ é chamada de função quadrática. Portanto, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ é quadrática.

Admitiremos que o leitor possui o conhecimento básico dessas funções, incluindo suas propriedades e o esboço de seus gráficos. No caso da função quadrática, o resultado abaixo mostra uma condição para que duas funções quadráticas sejam iguais. Esse resultado será muito importante para o entendimento deste trabalho.

Teorema 2.7. Sejam $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = \overline{a}x^2 + \overline{b}x + \overline{c}$ funções quadráticas, tais que $f(x_1) = g(x_1)$, $f(x_2) = g(x_2)$ e $f(x_3) = g(x_3)$ com $x_1 \neq x_2 \neq x_3$. Então, $a = \overline{a},\ b = \overline{b}$ e $c = \overline{c}$.

Demonstração. De fato, considere o sistema abaixo:

$$\begin{cases} f(x_1) & - & g(x_1) & = & 0 \\ f(x_2) & - & g(x_2) & = & 0 \\ f(x_3) & - & g(x_3) & = & 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (a-\overline{a})x_1^2 & + & (b-\overline{b})x_1 & + & c-\overline{c} & = & 0 \\ (a-\overline{a})x_2^2 & + & (b-\overline{b})x_2 & + & c-\overline{c} & = & 0 \\ (a-\overline{a})x_3^2 & + & (b-\overline{b})x_3 & + & c-\overline{c} & = & 0 \end{cases}$$

escalonando esse sistema, obtém-se:

$$\begin{cases} (a-\overline{a})x_1^2 & + & (b-\overline{b})x_1 & + & c-\overline{c} & = & 0 & (I) \\ (a-\overline{a})\cdot(x_1+x_2) & + & b-\overline{b} & = & 0 & (II) & & \\ (a-\overline{a})\cdot(x_2-x_3) & = & 0 & (III) & & & & \end{cases}$$

Como $x_2 \neq x_3$, segue-se de (III) que $a = \overline{a}$. Substituindo $a = \overline{a}$ em (II), encontramos $b = \overline{b}$. Finalmente, substituindo $a = \overline{a}$ e $b = \overline{b}$ em (I), obtém-se $c = \overline{c}$. ■

3 PROGRESSÃO ARITMÉTICA E FUNÇÃO AFIM

Nesse capítulo, com o intuito de iniciar o estudo das relações entre funções e progressões, começaremos explorando as relações entre função afim e progressão aritmética. Sabe-se que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é afim quando é da forma $f(x) = ax + b$. Por outro lado, sabe-se que, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma progresão aritmética, o seu termo geral é dado pela expressão $x_n = a_1 + (n-1)r$. Nessa expressão, tomando $a = r$ e $b = a_1 - r$, percebe-se uma importante relação entre a função afim e a progressão aritmética que é o conteúdo do seguinte resultado:

Teorema 3.1. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função afim, então a restrição do domínio de f ao conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é uma progressão aritmética.

Demonstração. De fato, a restrição do domínio de f ao conjunto $\mathbb{N}$ é a sequência $x_n = an + b$ para todo número natural n. Assim, tomando $a = r$ e $b = a_1 - r$, x_n é uma progressão aritmética de primeiro termo a_1 e razão r. ■

Dessa forma, toda função afim $f(x) = ax + b$ pode ser relacionada com a progressão aritmética obtida pela restrição de seu domínio ao conjunto $\mathbb{N}$. Por exemplo, a função afim $f(x) = 3x + 1$ pode ser relacionada com a progressão aritmética $(4,\ 7,\ 10,\ 13,\ \ldots)$ obtida de f quando variamos x no conjunto dos números naturais. Portanto, conceitos desses dois conteúdos podem ser utilizados na resolução de exercícios, como veremos a seguir:

Exemplo 2. Para calcular o centésimo termo da progressão aritmética $(45,\ 40,\ 35,\ \ldots)$, pode-se usar a expressão do termo geral, onde $n = 100$, $a_1 = 45$ e $r = 40 - 45 = -5$. Logo:

$$\begin{aligned} x_{100} &= 45 + (100-1)\cdot(-5) \\ &= 45 + 99\cdot(-5) \\ &= 45 - 495 \\ &= -450 \end{aligned}$$

No entanto, pelo **Teorema 3.1** a função afim $f(x) = -5x + 50$ gera a progressão aritmética desse exercício (basta fazer $a = r$ e $b = a_1 - r$) e o problema seria facilmente resolvido calculando $f(100) = -5\cdot 100 + 50 = -450$.

□

Exemplo 3. Na fisíca, o movimento retilínio uniforme (M.U) tem como característica principal a velocidade constante. Na verdade, se um corpo se move sobre uma trajetória retilínea com velocidade constante de módulo v e, para percorrer uma distância $\Delta s(t) = s(t) - s_0$, esse corpo leva o tempo t. Então, a velocidade v é dada por:

$$\begin{aligned} v &= \frac{\Delta s(t)}{t} \\ &= \frac{s(t) - s_0}{t} \end{aligned}$$

onde $s(t)$ e s_0 são as posições final e inicial, respectivamente, do corpo na trajetória retilínea, e s_0 é constante. Segue-se que $s(t) = s_0 + vt$; essa expressão é conhecida como função horária dos espaços para o movimento uniforme.

Note que a função s é a restrição do domínio da função afim $s(x) = s_0 + vx$ ao conjunto dos números reais positivos. No entanto, pelo que foi discutido acima, a sequência $s_n = s_0 + vn$ é uma progressão aritmética de razão $r = v$ e primeiro termo $a_1 = s_1 = s_0 + v$. Por exemplo, Suponha que um corpo se move numa trajetória retilínea com velocidade constante e suas posições e tempo são dadas na tabela a seguir:

Tabela 1 – Deslocamento em função do tempo

$t(s)$	$s(m)$
1	4
2	7
3	10
4	13
...	...

Fonte: Elaboração própria (2025)

Se estivermos interessado em calcular a velocidade, pelo que discutido acima, basta verificar a razão da progressão aritmética $(4,\ 7,\ 10,\ 13,\ \ldots)$ e teríamos $v = 3m/s$.

□

É preciso esclarecer que nem sempre, nos exercícios desse tipo, a sequência formada pelos valores de t é $(1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$. Na verdade, essa sequência pode ser uma progressão aritmética qualquer ou sequer formar uma progressão aritmética. No caso de não formar uma progressão aritmética, o problema pode ser solucionado pela função horária dos espaços. É impostante ressaltar que não estamos apresentando nesse trabalho um método que substitui a função afim, e sim, apresentando uma relação entre a função afim e a progressão aritmética. Logo, o leitor poderá, quando possível, usar uma ou outra forma com a intenção de facilitar a resolução do problema. Por sorte, no caso da sequência formada pelos valores de t ser uma progressão aritmética, o **Teorema 3.3** garante que a sequência formada pelos valores de s é uma progressão aritmética. Essa ideia pode ser utilizada em qualquer área do conhecimento que trabalhe com conteúdos que envolvem as funções afins. O aluno ou professor, ao se deparar com situações como esta, poderá investigar ou buscar uma progressão aritmética dentro do problema, comparar com a função afim e obter a melhor forma possível de solucioná-lo.

Por outro lado, ainda na perspectiva de relacionar função afim e progressão aritmética, mostraremos como essa relação se comporta no gráfico da função afim. Sabe-se que o gráfico da função afim $f(x) = ax + b$ é uma reta. A restrição do domínio de f ao conjunto dos números

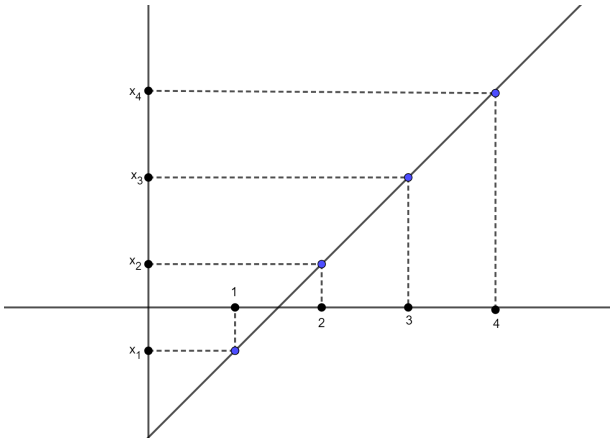
naturais, isto é, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, é uma sequência dada por $f(n) = x_n = an + b$. Além disso, como:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= a(n+1) + b - an - b \\ &= \cancel{an} + a + \cancel{b} - \cancel{an} - \cancel{b} \\ &= a. \end{aligned}$$

Então, x_n é uma progressão aritmética de razão a e primeiro termo $f(1) = x_1 = a \cdot 1 + b = a + b$.

Daí, podemos concluir que os pontos (n, x_n) para todo $n \in \mathbb{N}$ são colineares, como mostra a figura a seguir:

Figura 2 – Representação gráfica da progressão aritmética



Fonte: Elaboração própria (2025)

Além disso, como o termo geral de uma progressão aritmética é dado por $x_{n+1} = x_1 + nr$, podemos concluir que os termos dessa progressão, mais precisamente, os pontos (n, x_n) para todo número natural n, pertencem ao gráfico da função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x_1 + xr$.

O coeficiente angular a da função afim não constante pode ser calculado usando os termos da progressão aritmética associada a ela. Com efeito, se x_m e x_n são termos distintos da progressão aritmética (m$\neq n$)(x$_n$)$_{n \in \mathbb{N}}$, que resulta da restrição do domínio da função afim $f(x) = ax + b$ ao conjunto $\mathbb{N}$, então:

$$\begin{aligned} f(m) - f(n) &= am \cancel{+b} - an \cancel{-b} \\ &= am - an \\ &= a \cdot (m - n) \end{aligned}$$

Segue-se que

$$a = \frac{f(m) - f(n)}{m - n} \tag{3.1}$$

Na prática, ao se deparar com o gráfico de uma função afim, podemos estudar o crescimento da função por meio da progressão aritmética associada, uma vez que, se $a > 0$, a função afim é crescente; se $a < 0$, a função afim é decrescente. Além disso, será provado mais adiante

que, dada qualquer progressão aritmética, a sequência formada pelas imagens de seus termos pela função afim é uma progressão aritmética. Em outras palavras, se olharmos para o gráfico acima e marcarmos pontos no eixo das abscissas de tal forma que esses pontos formem uma progressão aritmética, as imagens geradas por esses pontos formarão uma progressão aritmética no eixo das ordenadas. Agora, passaremos a discutir a caracterização da função afim.

3.1 Caracterização da função afim

Nesta seção, apresentaremos mais uma importante relação entre as funções afins e a progressão aritmética: as imagens dos termos de uma progressão aritmética por uma função afim formam uma progressão aritmética. O Teorema a seguir será extremamente útil para provar esse resultado.

Teorema 3.2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:
i) $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$;
ii) Tomando $f(1) = a$ temos $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$;
iii) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ (Lima, 2013, p. 86).

Demonstração. Vamos mostrar que $i) \Rightarrow ii)$, $ii) \Rightarrow iii)$ e $iii) \Rightarrow i)$. De fato,

$i) \Rightarrow ii)$
Seja $f(1) = a$ e $m \in \mathbb{Q}$ com $m = \dfrac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$. Temos que:

$$q \cdot f(mx) = f(q \cdot \frac{p}{q} \cdot x)$$
$$q \cdot f(mx) = f(p \cdot x)$$
$$q \cdot f(mx) = p \cdot f(x).$$

Portanto, como $q \neq 0$, segue-se da última igualdade acima que $f(mx) = \dfrac{p}{q} \cdot f(x)$, isto é, $f(mx) = mf(x)$.

Por outro lado, como $f(1) = a$, obtemos: $f(m) = f(m \cdot 1) = mf(1) = am$. Logo, $ii)$ é válido para todo número racional m. Agora, suponha que existe um número irracional b, tal que $f(b) \neq ab$ e considere, sem perda de generalidade, que $f(b) > ab$. Além disso, como $f(0) = f(0 \cdot 0) = 0 \cdot f(0) = 0$ e $0 < 1$, da monoticidade de f, obtemos $a = f(1) > f(0) = 0$, ou seja, a é positivo. Logo,

$$f(b) > ab \Rightarrow \frac{f(b)}{a} > b.$$

Adicionalmente, da densidade dos números racionais, existe $r \in \mathbb{Q}$ com:

$$\frac{f(b)}{a} > r > b \;\Rightarrow\; f(b) > ar > ab \;\Rightarrow\; f(b) > f(r) > ab.$$

No entanto, como $r > b$, pela monoticidade de f, deveríamos ter $f(r) > f(b)$ e não $f(b) > f(r)$. A contradição aqui surgiu quando supomos a existência de um número irracional b, tal que $f(b) \neq ab$. Segue-se que $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $a = f(1)$.
$ii) \Rightarrow iii)$
Por $ii)$ temos:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= a(x+y) \\ &= ax+ay \\ &= f(x)+f(y) \end{aligned}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Finalmente, vamos mostrar que $iii) \Rightarrow i)$. Como, para $n = 1$ e $n = 0$, $i)$ é válida, suponha que para algum $n > 1$ tenhamos $f(nx) = nf(x)$. Logo, por $iii)$ e pela hipótese de indução:

$$\begin{aligned} f((n+1)x) &= f(nx+x) \\ &= f(nx)+f(x) \\ &= nf(x)+f(x) \\ &= (n+1)\cdot f(x). \end{aligned}$$

Daí, pelo princípio da indução finita, $f(nx) = nf(x)$ para todo n inteiro com $n \geq 1$. Por outro lado, para todo $x \in \mathbb{R}$ e de $iii)$, tem-se:

$$\begin{aligned} f(-x) &= f(x-2x) \\ &= f(x+(-2x)) \\ &= f(x)+f(-2x) \\ &= f(x)+f(-x+(-x)) \\ &= f(x)+f(-x)+f(-x) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f(-x) = f(x)+2f(-x) \\ &\Rightarrow f(x)+f(-x) = 0 \\ &\Rightarrow f(-x) = -f(x). \end{aligned}$$

Agora, se $n < 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} f(nx) &= f(-(-nx)) \\ &= -f(-nx) \\ &= -(-n)f(x) \\ &= nf(x). \end{aligned}$$

Portanto, $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$. ■

O próximo Teorema aborda uma outra relação entre a função afim e a progressão aritmética. Essa relação estabelece uma condição para uma função seja afim através de uma propriedade que somente as funções afins possuem: transformar toda progressão aritmética em progressão aritmética.

Teorema 3.3. Uma função monótona $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função afim se, e somente se, transforma toda progressão aritmética numa progressão aritmética, isto é, se $x_n = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots)$ é uma progressão aritmética, então $y_n = (f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ \ldots)$ é também uma progressão aritmética (Lima, 2013).

Demonstração. De fato, seja f é uma função afim dada por $f(x) = ax + b$ com a e b números reais e x_n uma progressão aritmética de razão r. Tomando $y_n = f(x_n)$, segue-se que:

$$\begin{aligned}
\Delta y_n &= y_{n+1} - y_n \\
&= f(x_{n+1}) - f(x_n) \\
&= ax_{n+1} + b - ax_n - b \\
&= ax_{n+1} \cancel{+b} - ax_n \cancel{-b} \\
&= ax_{n+1} - ax_n \\
&= a(x_{n+1} - x_n) \\
&= a \cdot r
\end{aligned}$$

Como $a \cdot r$ é constante, da **Definição 2.2** temos que y_n é uma progressão aritmética. Reciprocamente, seja f uma função monótona que transforma toda progressão aritmética em progressão aritmética, e vamos mostrar que f é uma função afim. Com efeito, considere a função $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $e(x) = f(x) - f(0)$. Das hipóteses de f, obtemos que e é uma função monótona que também tranforma toda progressão aritmética numa progressão aritmética e, além disso, $e(0) = f(0) - f(0) = 0$. Pois bem, como a sequência $(-x, 0, x)$ é uma progressão aritmética para todo $x \in \mathbb{R}$, obtemos que $e(-x),\ 0 = e(0),\ e(x)$ forma, nessa ordem, uma progressão aritmética de razão $e(x) - 0 = e(x)$ assim, $0 - e(-x) = e(x)$, isto é, $e(-x) = -e(x)$ para todo x real.

Analogamente, a sequência $0,\ x,\ 2x,\ 3x,\ \ldots,\ nx$ é uma progressão aritmética para todo n natural. Sendo assim, $0,\ e(x),\ e(2x),\ \ldots,\ e(nx)$ é uma progressão aritmética de razão $e(x)$ (basta subtrair o segundo termo do primeiro termo). Como para avançar do termo $e(x)$ para o termo $e(nx)$ basta somar n parcelas da razão $e(x)$, temos que $e(nx) = ne(x)$ para todo número natural n. Por outro lado, se $n < 0$, então $-n > 0$ e assim:

$$\begin{aligned}
e(nx) &= e(-(-nx)) \\
&= -e(-nx) \\
&= -(-n)e(x) \\
&= ne(x).
\end{aligned}$$

Logo, pelo **Teorema 3.2** a função e é linear, isto é, tomando $e(1) = a$ podemos escrever $e(x) = ax$ para todo x real. Assim, tomando $f(0) = b$ encontramos o seguinte:

$$\begin{aligned} e(x) &= f(x) - f(0) \\ ax &= f(x) - b \\ f(x) &= ax + b, \end{aligned}$$

o que prova o Teorema. ■

Esse resultado não é tão óbvio de ser observado quando se tem uma função monótona cuja lei de formação não é conhecida. No entanto, saber que uma função afim tranforma progressão aritmética em progressão aritmética traz mais uma ideia na resolução de problemas. No **Exemplo 3**, suponha que a tabela dada fosse:

Tabela 2 – Deslocamento em função do tempo

$t(s)$	$s(m)$
5	16
9	28
10	31
12	37
15	46
...	...

Fonte: Elaboração própria (2025)

e que estivessemos interessados em calcular a velocidade v novamente. Note que, mesmo a sequência $(5,\ 9,\ 10,\ 12,\ 15,\ \ldots)$ não sendo uma progressão aritmética, podemos tomar a subsequência dela $(5,\ 10,\ 15,\ \ldots)$ que é uma progressão aritmética. Pelo **Teorema 3.3**, a sequência $(16,\ 31,\ 46,\ \ldots)$ é uma progressão aritmética de razão $r = 15$. Nesse caso, não teríamos $r = v$, uma vez que $v = 3m/s$. Essa divergência ocorreu porque não foi utilizado a sequência $(1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$, e, ao invés disso, foi utilizada a subsequência $(5,\ 10,\ 15,\ \ldots)$. Para resolver esse problema, considere a sequência $(x_5 = 1,\ x_{10} = 2,\ x_{15} = 3,\ \ldots)$, cujo termo geral é dado por $x_n = \dfrac{n}{5}$, e a sequência $y_n = (16,\ 31,\ 46,\ \ldots)$, que é uma progressão aritmética de termo geral $y_n = 15n + 1$. A composição $k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $k(n) = y(x(n))$ é uma sequência, tal que:

$$\begin{aligned} \text{k(n)} &= y(x(n)) \\ &= y\left(\frac{n}{5}\right) \\ &= 15 \cdot \left(\frac{n}{5}\right) + 1 \\ &= 3n + 1 \end{aligned}$$

Note que $k(n) = 3n + 1$ é uma progressão aritmetica de razão $r = 3$, e então obteríamos a solução do problema, isto é, $v = 3m/s$. No entanto, esse problema ficaria mais fácil de ser resolvido

utilizando a igualdade 3.1. De fato, sejam $m = 9$ e $n = 5$, segue-se que:

$$\begin{aligned} a &= \frac{t(m) - t(n)}{m - n} \\ &= \frac{t(9) - t(5)}{9 - 5} \\ &= \frac{28 - 16}{4} \\ &= \frac{12}{4} \\ &= 3m/s \end{aligned}$$

□

Relacionar a função afim com progresão aritmética traz um ganho considerável na prática pedagógica e, consequentemente, na aprendizagem desses conteúdos. Isso porque melhora a habilidade de analisar propriedades, ajuda na dedução de fórmulas, pode trazer uma solução alternativa para problemas e a auxilia na percepção da Matemática como um corpo de conhecimentos consistente e lógico.

4 PROGRESSÃO ARITMÉTICA DE SEGUNDA ORDEM E FUNÇÃO QUADRÁTICA

Neste capítulo, exploraremos a relação entre a função quadrática e progresão aritmética de segunda ordem. Nosso objetivo é motivar o uso dessas progressões em conjunto com as função quadráticas, examinando sua utilização como uma ferramenta adicional na resolução de problemas sempre que possível.

O estudo dessa relação pode ser incentivado pela seguinte observação: considerando a função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, a restrição do domínio dessa função ao conjunto dos números naturais resulta em uma progressão aritmética de segunda ordem. De fato, considere a sequência $x_n = f(n) = an^2 + bn + c$ para todo número natural n, tem-se: $x_n = (a+b+c,\ 4a+2b+c,\ 9a+3b+c,\ 16a+4b+c,\ \ldots)$ e $\Delta x_n = (3a+b,\ 5a+b,\ 7a+b,\ \ldots)$. Como Δx_n é uma progressão aritmética de razão $r = 2a \neq 0$, a sequência x_n é uma progressão aritmética de segunda ordem, conforme a **Definição 2.3**. Logo, uma maneira de obter uma progressão aritmética de segunda ordem é tomar qualquer função quadrática e restringir seu domínio ao conjunto dos números naturais. O próximo resultado fortalece essa informação.

Teorema 4.1. Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética de segunda ordem se, e somente se, existem números reais $a \neq 0$, b e c, tais que $x_n = an^2 + bn + c$. Logo, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a progressão aritmética de segunda ordem associada à função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Demonstração. Suponha que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética de segunda ordem. Por definição, $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ é uma progressão aritmética. Por outro lado,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k &= (\cancel{x_2} - x_1) + (\cancel{x_3 - x_2}) + (\cancel{x_4 - x_3}) + \ldots + (x_{n+1} \cancel{- x_n}) \\ &= x_{n+1} - x_1\end{aligned}$$

Portanto, $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = x_{n+1} - x_1$. Como Δx_n é uma progressão aritmética, a soma $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k$ é dada pela expressão

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \frac{(\Delta x_1 + \Delta x_n) \cdot n}{2}$$

e como $\Delta x_n = \Delta x_1 + (n-1)r$, onde r é a razão da progressão aritmética Δx_n, segue-se que $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k$ é um polinômio de grau 2 em n e portanto, x_n é um polinômio de grau 2 em n. Logo, existem números reais $a \neq 0$, b e c, tais que $x_n = an^2 + bn + c$. Reciprocamente, se $x_n = an^2 + bn + c$ com $a \neq 0$, b e c números reais, pelo que foi discutido acima, x_n é uma progressão aritmética de segunda ordem. ■

O resultado do Teorema anterior permite encontrar uma função quadrática associada a uma progressão aritmética de segunda ordem. No exemplo a seguir, mostraremos esse fato.

Exemplo 4. Considere a sequência $x_n = (6,\ 18,\ 36,\ 60,\ 90,\ 126,\ \ldots)$. Encontre uma expressão em n para o termo geral x_n. De fato, na tabela a seguir calculamos alguns valores para Δx_n:

Tabela 3 – Progressão aritmética de segunda ordem

n	x_n	Δx_n
1	6	12
2	18	18
3	36	24
4	60	30
5	90	36
6	126	...
7	...	...
...	...	...

Fonte: Elaboração própria (2025)

Portanto, como (Δx_n) é uma progressão aritmética de razão não nula, temos que (x_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem. Daí, pelo **Teorema 4.1**, x_n é um polinômio de grau 2 em n. Escrevendo $x_n = an^2 + bn + c$ e lembrando que $x_1 = 6$, $x_2 = 18$ e $x_3 = 36$, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} x_1 &= a \cdot 1^2 &+ b \cdot 1 &+ c \\ x_2 &= a \cdot 2^2 &+ b \cdot 2 &+ c \\ x_3 &= a \cdot 3^2 &+ b \cdot 3 &+ c \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} a &+ b &+ c &= 6 \\ 4a &+ 2b &+ c &= 18 \\ 9a &+ 3b &+ c &= 36 \end{cases}$$

cuja solução é $a = 3$, $b = 3$ e $c = 0$. Portanto, $x_n = 3n^2 + 3n$ e x_n é a restrição do domínio da função quadrática $f(x) = 3x^2 + 3x$ ao conjunto $\mathbb{N}$.

□

Com essa discussão, problemas que envolvem a função quadrática, nos quais se busca calcular os coeficientes a, b e c, podem ser solucionados. Antes de mostrar um exemplo que aborda esse problema, vamos generalizar o resultado discutido acima, encontrando uma expressão para o termo geral de x_n

Teorema 4.2. Sejam $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_1}$ uma progressão aritmética de segunda ordem. Então, o termo geral de x_n é dado por

$$x_n = \frac{r}{2}n^2 + \left(y_0 - \frac{r}{2}\right)n + x_0$$

onde r é a razão da progressão aritmética $y_n = \Delta x_n$, e x_0 e y_0 são os primeiros termos de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_1}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_1}$, respectivamente.

Demonstração. De fato, pelo **Teorema 4.1**, existem números reais a, b e c com $a \neq 0$, tais que $x_n = an^2 + bn + c$, isto é, x_n é um polinômio de grau 2 em n. Variando n no conjunto $\{0,1,2\}$ obtemos o sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = x_1 \\ 4a + 2b + c = x_2 \\ \qquad\qquad c = x_0 \end{cases}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2-4 = -2 \neq 0$, o sistema acima possui uma única solução. Calculando-a, tem-se:

$$\begin{cases} a + b + c = x_1 \\ 4a + 2b + c = x_2 \\ \qquad\qquad c = x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + x_0 = x_1 \\ 4a + 2b + x_0 = x_2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$\begin{aligned} a &= \frac{x_0}{2} - x_1 + \frac{x_2}{2} \\ &= \frac{x_0 - 2x_1 + x_2}{2} \\ &= \frac{(x_2 - x_1) - (x_1 - x_0)}{2} \\ &= \frac{r}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} b &= -\frac{3}{2}x_0 + 2x_1 - \frac{x_2}{2} \\ &= \frac{-3x_0 + 4x_1 - x_2}{2} \\ &= \frac{-3x_0 + 3x_1 + x_1 - x_2}{2} \\ &= \frac{3(x_1 - x_0) - (x_2 - x_1)}{2} \\ &= \frac{2(x_1 - x_0) + (x_1 - x_0) - (x_2 - x_1)}{2} \\ &= \frac{2y_0 - r}{2} \\ &= y_0 - \frac{r}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, substituindo $a = \frac{r}{2}$, $b = y_0 - \frac{r}{2}$ e $c = x_0$ na igualdade $x_n = an^2 + bn + c$, obtemos a seguinte fórmula para o termo geral de x_n:

$$x_n = \frac{r}{2}n^2 + \left(y_0 - \frac{r}{2}\right)n + x_0 \tag{4.1}$$

para todo $n \in N_1$. ■

Exemplo 5. Considere a progressão aritmética de segunda ordem do **Exemplo 4**, isto é, $x_n = (6,\ 18,\ 36,\ 60,\ 90,\ 126,\ \ldots)$ e o conjunto $A = \{2,\ 5,\ 8,\ \ldots\} \subset \mathbb{N}_1$.Vamos utilizar a igualdade 4.1 para calcular uma expressão para $\overline{x_n}$ onde $\overline{x} : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ é a subsequência de x_n dada por $\overline{x_n} = (18,\ 90,\ 216,\ 396,\ \ldots)$. De fato, note que $\overline{x_0} = 18$, $\overline{y_0} = 90 - 18 = 72$ e $r = (216 - 90) - (90 - 18) = 54$. Segue-se que

$$\begin{aligned}
\overline{x_n} &= \frac{r}{2}n^2 + \left(\overline{y_0} - \frac{r}{2}\right)n + \overline{x_0} \\
&= \frac{54}{2}n^2 + \left(72 - \frac{54}{2}\right)n + 18 \\
&= 27n^2 + 45n + 18
\end{aligned}$$

Note que a expressão encontrada para $\overline{x_n}$ não é a mesma encontrada no **Exemplo 4**. Essa divergência ocorreu porque não consideramos o conjunto $\mathbb{N}_1$ como domínio da sequência x_n, mas sim o conjunto $A = \{2,\ 5,\ 8,\ \ldots\}$, obtendo uma subsequência de x_n. Para encontrar o mesmo resultado do exemplo anterior, basta encontrar uma função $h : A \to \mathbb{N}_1$, tal que $h(2) = 0,\ h(5) = 1,\ h(8) = 2,\ \ldots$ e aplicar na sequência $\overline{x_n}$ encontrada. Logo, usando os resultados obtidos no capítulo anterior, obtemos $h(n) = \dfrac{n-2}{3}$. Assim,

$$\begin{aligned}
x_n &= \overline{x}\left(\frac{n-2}{3}\right) \\
&= 27\left(\frac{n-2}{3}\right)^2 + 45\left(\frac{n-2}{3}\right) + 18 \\
&= 3 \cdot (n^2 - 4n + 4) + 15 \cdot (n-2) + 18 \\
&= 3n^2 - 12n + 15n + 12 - 30 + 18 \\
&= 3n^2 + 3n
\end{aligned}$$

□

Pelo que foi discutido acima, para encontrar o termo geral de uma progressão aritmética de segunda ordem x_n dada uma subsequência $\overline{x} : A \to \mathbb{R}$, onde $A = \{n_0,\ n_1,\ n_2,\ \ldots\}$ formem nesta ordem uma progressão aritmética de razão $\overline{r}$, basta tomar a função $h : A \to \mathbb{N}_1$ dada por $h(n) = \dfrac{n - n_0}{\overline{r}}$ e então teríamos $x_n = \overline{x}(h(n))$, ou seja,

$$x_n = \frac{r}{2}\left(\frac{n - n_0}{\overline{r}}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{r}{2}\right)\left(\frac{n - n_0}{\overline{r}}\right) + x_0. \tag{4.2}$$

No exemplo a seguir, vamos resolver uma questão do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) de 2014 em que é possivel utilizar a igualdade encontrada acima.

Exemplo 6. ENEM - 2014 - Questão 164 - Um professor, depois de corrigir as provas da sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial f, de grau menor que 3, para alterar as notas x da prova para notas $y = f(x)$, da seguinte maneira:
• A nota zero permanece zero.
• A nota 10 permanece 10.
• A nota 5 passa a ser 6.
A expressão da função $y = f(x)$ a ser utilizada pelo professor é
a) $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$
b) $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$
c) $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x$
d) $y = \frac{4}{5}x + 2$
e) $y = x$ (Brasil, 2014, p. 28).

Note que a sequência $(0,\ 5,\ 10,\ \ldots)$ é uma progressão aritmética de razão $\overline{r} = 5$ e $n_0 = 0$. Por outro lado, a sequência $(0,\ 6,\ 10,\ 12,\ \ldots)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem. Para essa sequência, temos $x_0 = 0,\ \Delta x_0 = 6 - 0 = 6,\ \Delta x_1 = 10 - 6 = 4$. A progressão aritmética associada é $\Delta x_n = (6,\ 4,\ 2,\ \ldots)$, cuja razão é $r = 4 - 6 = -2$. Segue-se da igualdade 4.2:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{r}{2}\left(\frac{n-n_0}{\overline{r}}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{r}{2}\right)\left(\frac{n-n_0}{\overline{r}}\right) + x_0 \\ &= -\frac{2}{2}\left(\frac{n-0}{5}\right)^2 + \left(6 + \frac{2}{2}\right)\left(\frac{n-0}{5}\right) + 0 \\ &= -\frac{1}{25}n^2 + \frac{7}{5}n \end{aligned}$$

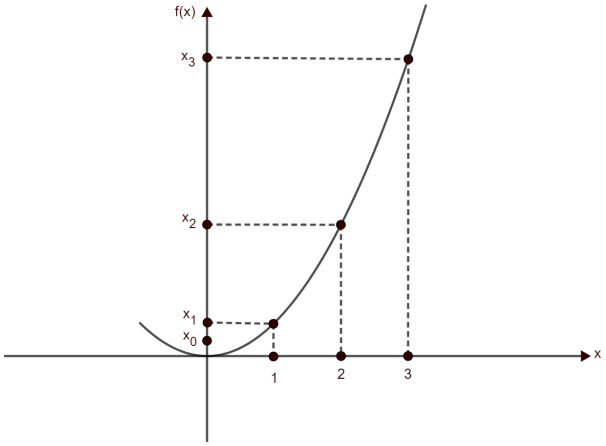
Portanto, a função associada à sequência $x(n)$ é $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$.

□

A justificativa para essa forma de solução será apresentada no Teorema de Caracterização da Função Quadrática, onde será provado que toda função quadrática transforma progressão aritmética em progressão aritmética de segunda ordem. Como estávamos procurando uma função f que transforma a progressão aritmética $(0,\ 5,\ 10,\ \ldots)$ na progressão aritmética de segunda ordem $(0,\ 6,\ 10,\ 12,\ \ldots)$, intuitivamente podemos supor que f é uma função quadrática e tentar a solução pela igualdade 4.2. No próximo capítulo, mostraremos outros exemplos de função quadrática onde a utilização da progressão aritmética de segunda ordem é apresentada como uma alternativa para sua solução. Por enquanto, vamos analizar as propriedades da função quadrática usando a progressão aritmética de segunda ordem. De fato, considere a função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$. Sabe-se que o gráfico dessa função é uma parábola. Pelo que foi discutido acima, se $x_n = an^2 + bn + c$ é a progressão aritmética associada

a essa função, então os pontos $(0,x_0)$, $(1,x_1)$, $(2,x_2)$, $\ldots$ pertencem ao gráfico da função f, como mostra a figura abaixo.

Figura 3 – Representação gráfica da progressão aritmética de segunda ordem



Fonte: Elaboração própria (2025)

Por outro lado, segue-se da igualdade 4.1 que $a = \dfrac{r}{2}$. Assim, se $r > 0$ a parábola possui concavidade voltada para cima; e se $r < 0$, a concavidade da parábola (gráfico de f) está voltada para baixo. Além disso, $c = x_0$, então $(0,x_0)$ é o ponto em que a parábola intersecta o eixo das ordenadas. Como as coordenadas do vértice V da parábola são $V\left(-\dfrac{b}{2a}, f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$, e

$$\begin{aligned} -\frac{b}{2a} &= -\frac{y_0 - \frac{r}{2}}{2 \cdot \frac{r}{2}} \\ &= \frac{\frac{r}{2} - y_0}{r} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{y_0}{r} \end{aligned}$$

segue-se que

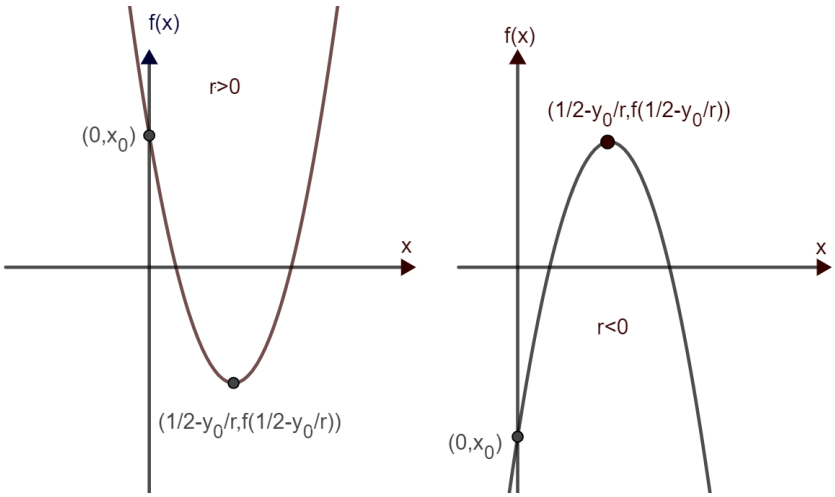
$$V\left(\frac{1}{2} - \frac{y_0}{r}, f\left(\frac{1}{2} - \frac{y_0}{r}\right)\right)$$

Esses resultados estão representados na figura abaixo.

Exemplo 7. Suponha que $x_n = (3,\ 4,\ 7,\ 12,\ \ldots)$ é uma sequência gerada pela restrição do domínio $\mathbb{R}$ ao conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$ de uma função quadrática f. Então x_n é uma progressão aritmética de segunda ordem com: $x_0 = 3$, $y_0 = 4 - 3 = 1$ e $r = (7-4) - (4-3) = 2$, portanto, a parábola (gráfico de f,) possui vértice $V\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}, f\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\right)\right)$, ou seja, $v(0, f(0))$. Como $f(0) = x_0 = 3$, o vértice da parábola é $V(0,3)$ e $(0,3)$ é o ponto que a parábola intersecta o eixo das ordenadas.

$\square$

Figura 4 – Gráfico da função quadrática



Fonte: Elaboração própria (2025)

Agora, utilizando a igualdade 4.1, vamos encontrar uma expressão para a soma dos $n+1$ primeiros termos de uma progressão aritmética de segunda ordem. De fato, seja $x_n = (x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots)$ uma progressão aritmética de segunda ordem, e vamos calcular, em função de n, uma expressão para a soma $S_{n+1} = a_0 + a_1 + a_2 + +a_n$. Sabe-se da igualdade 4.1 que $x_k = \frac{r}{2}k^2 + \left(y_0 - \frac{r}{2}\right)k + x_0$. Aplicando o somatório com $k \in \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ em todos os termos dessa igualdade, obtém-se:

$$\sum_{k=0}^{n} x_k = \frac{r}{2}\sum_{k=0}^{n} k^2 + \left(y_0 - \frac{r}{2}\right)\cdot\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} x_0$$

isto é,

$$S_{n+1} = \frac{r}{2}\sum_{k=0}^{n} k^2 + \left(y_0 - \frac{r}{2}\right)\cdot\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} x_0. \qquad (*)$$

Como sabemos, $\sum_{k=0}^{n} x_0 = (n+1)x_0$ e $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Para calcular $\sum_{k=0}^{n} k^2$ procederemos da seguinte maneira: sabe-se que $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$. Aplicando o somatório com $k \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ n\}$, obtém-se:

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 + 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1$$

Desenvolvendo os dois primeiros somatórios acima e simplificando os termos iguais em ambos os lados da igualdade, tem-se:

$$\cancel{1^3} + \cancel{2^3} + \cancel{3^3} + \ldots + (n+1)^3 = 0^3 + \cancel{1^3} + \cancel{2^3} + \ldots + \cancel{n^3} + 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$

ou seja,

$$(n+1)^3 = 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$

isolando $\sum_{k=0}^{n} k^2$ e simplificando os termos semelhantes, tem-se da última igualdade acima que:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^2 &= \frac{1}{3}\cdot\left[(n+1)^3 - 3\cdot\frac{n(n+1)}{2} - n - 1\right] \\
&= \frac{1}{3}\cdot\left[n^3 + 3n^2 + 3n\cancel{+1} - \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - n\cancel{-1}\right] \\
&= \frac{1}{3}\cdot\left[n^3 + \frac{3n^2}{2} + \frac{n}{2}\right] \\
&= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}
\end{aligned}$$

Finalmente, substituindo $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$, $\sum_{k=0}^{n} x_0 = (n+1)x_0$ e $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ na igualdade $(*)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= \frac{r}{2}\sum_{k=0}^{n} k^2 + \left(y_0 - \frac{r}{2}\right)\cdot\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} x_0 \\
&= \frac{r}{2}\cdot\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) + \left(y_0 - \frac{r}{2}\right)\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2} + (n+1)x_0 \\
&= \frac{r}{6}n^3 + \left(\cancel{\frac{r}{4}} + \frac{y_0}{2} - \cancel{\frac{r}{4}}\right)n^2 + \left(\frac{r}{12} + \frac{y_0}{2} - \frac{r}{4} + x_0\right)n + x_0,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$S_{n+1} = \frac{r}{6}n^3 + \frac{y_0}{2}n^2 + \left(x_0 + \frac{y_0}{2} - \frac{r}{6}\right)n + x_0. \tag{4.3}$$

Exemplo 8. Vamos calcular o valor de S_{15} na progressão aritmética de segunda ordem $x_n = (4,\ 7,\ 18,\ 37,\ \ldots)$. Com efeito, substituindo $x_0 = 4$, $y_0 = 3$, $r = 8$ e $n = 14$ na igualdade 4.3, obtém-se:

$$\begin{aligned}
S_{15} &= \frac{8}{6}\cdot 14^3 + \frac{3}{2}\cdot 14^2 + \left(4 + \frac{3}{2} - \frac{8}{6}\right)\cdot 14 + 4 \\
&= \frac{4}{3}\cdot 2744 + \frac{3}{2}\cdot 196 + \frac{25}{6}\cdot 14 + 4 \\
&= \frac{10976}{3} + 3\cdot 98 + \frac{25}{3}\cdot 7 + 4 \\
&= \frac{10976}{3} + 294 + \frac{175}{3} + 4 \\
&= \frac{11151}{3} + 298 \\
&= 3717 + 298 = 4015
\end{aligned}$$

□

4.1 Caracterização da função quadrática

Nesta seção, demonstraremos uma importante relação entre a progressão aritmética de segunda ordem e a função quadrática. Especificamente, provaremos que toda função quadrática transforma uma progressão aritmética em uma progressão aritmética de segunda ordem.

Este resultado pode ser muito útil em diversos exercícios de função quadrática, especialmente quando a solução requer a análise de um gráfico e a descoberta da imagem de pontos que formam uma progressão aritmética. Por exemplo, suponha que f é uma função quadrática tal que $f(2) = 3$, $f(5) = 8$ e $f(8) = 17$. Qual seria o valor de $f(11)$? À luz do próximo teorema, como a sequência $(2,\ 5,\ ,8,\ \ldots)$ é uma progressão aritmética e f é uma função quadrática, a sequência $(3,\ 8,\ 17,\ \ldots)$ será, obrigatoriamente, uma progressão aritmética de segunda ordem. Assim, bastaria calcular o quarto termo dessa progressão para obter a resposta do problema. A progressão aritmética associada é $(5, 9, 13, \ldots)$, portanto $f(11) = 17 + 13 = 30$. Perceba que esse raciocínio nos poupa de usar, por exemplo, um sistema linear para resolver esse problema. Vejamos a demonstração desse resultado.

Teorema 4.3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função quadrática com $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a \neq 0$, e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma progressão aritmética de razão r. Então, a sequência dada por $y_n = f(x_n)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem.

Demonstração. Como r é a razão de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem-se que $r = x_{n+1} - x_n$ para todo número natural n. Assim:

$$\begin{aligned}
\Delta y_n &= y_{n+1} - y_n \\
&= f(x_{n+1}) - f(x_n) \\
&= a \cdot x_{n+1}^2 + b \cdot x_{n+1} \cancel{+c} - a \cdot x_n^2 - b \cdot x_n \cancel{-c} \\
&= a(x_{n+1}^2 - x_n^2) + b \cdot (x_{n+1} - x_n) \\
&= a \cdot (x_{n+1} - x_n) \cdot (x_{n+1} + x_n) + b(x_{n+1} - x_n) \\
&= (x_{n+1} - x_n) \cdot [a \cdot (x_{n+1} + x_n) + b] \\
&= r \cdot [a \cdot (x_{n+1} + x_n) + b].
\end{aligned}$$

Além disso, tomando $\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\Delta^2 y_n &= \Delta y_{n+1} - \Delta y_n \\
&= r \cdot [a \cdot (x_{n+2} + x_{n+1}) + b] - r \cdot [a \cdot (x_{n+1} + x_n) + b] \\
&= r \cdot a \cdot (x_{n+2} + x_{n+1}) \cancel{+rb} - r \cdot a \cdot (x_{n+1} + x_n) \cancel{-rb} \\
&= r \cdot a \cdot (x_{n+2} + x_{n+1} - x_{n+1} - x_n) \\
&= r \cdot a \cdot (x_{n+2} - x_{n+1} + x_{n+1} - x_n) \\
&= r \cdot a \cdot (r + r) \\
&= 2r^2 a.
\end{aligned}$$

Como $\Delta^2 y_n$ é constante, segue-se da definição 2.4 que Δy_n é uma progressão aritmética e, portanto, $y_n = f(x_n)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem. ■

No caso de f ser uma função contínua (Guidorizzi, 2016), a recíproca também é válida, ou seja:

Teorema 4.4. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua tal que a sequência $(f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_n),\ \ldots)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem para toda progressão aritmética $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots)$. Então, a função f é quadrática. (Araújo, 2013)

Demonstração. Seja $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função, tal que

$$h(x)=f(x)-f(0)$$

para todo número real x. Note que, pelas hipóteses da função f, h é contínua com $h(0)=f(0)-f(0)=0$, e h satisfaz a hipótese de transformar toda progressão aritmética em uma progressão aritmética de segunda ordem. Assim, como a sequência (1, 2, ..., n, ...) é uma progressão aritmética, a sequência $(h(1),\ h(2),\ \ldots,\ h(n),\ \ldots)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem. Segue-se do **Teorema 4.1** que existem $a,\ b$ e c com $a\neq 0$, tais que $h(m)=am^2+bm+c$ para todo número inteiro positivo m. Como $h(0)=0$, temos $c=0$. Portanto

$$h(m)=am^2+bm,\ \forall\ m\in\mathbb{Z}_+. \qquad (*)$$

Por outro lado, como a sequência $\left(\frac{1}{k},\ \frac{2}{k},\ \ldots,\ \frac{n}{k},\ \ldots\right)$ é uma progressão aritmética para todo inteiro positivo k, novamente pelo **Teorema 4.1**, existem $\overline{a},\ \overline{b}$ e $\overline{c}=0$, tais que

$$h\left(\frac{m}{k}\right)=\overline{a}m^2+\overline{b}m,\ \forall\ m,k\in\mathbb{Z}_+ \qquad (**)$$

Segue-se de $(*)$ e $(**)$ que, para todo inteiro positivo m

$$\begin{aligned} am^2+bm &= h(m)\\ &= h\left(\frac{mk}{k}\right)\\ &= \overline{a}(mk)^2+\overline{b}(mk)\\ &= (\overline{a}k^2)m^2+(\overline{b}k)m \end{aligned}$$

Portanto, as funções quadráticas ax^2+bx e $(\overline{a}k^2)x^2+(\overline{b}k)x$ coincidem nos números inteiros positivos. Segue-se da **Teorema 2.7** que $a=(\overline{a}k^2)$ e $b=(\overline{b}k)$, isto é, $\overline{a}=\frac{a}{k^2}$ e $\overline{b}=\frac{b}{k}$. Logo,

$$\begin{aligned} h\left(\frac{m}{k}\right) &= \overline{a}m^2+\overline{b}m\\ &= \left(\frac{a}{k^2}\right)m^2+\left(\frac{b}{k}\right)m\\ &= a\left(\frac{m}{k}\right)^2+b\left(\frac{m}{k}\right). \end{aligned}$$

para todo número racional positivo $\frac{m}{k}$. Analogamente, dadas as sequências $(-1,\ -2,\ \ldots,\ -n,\ \ldots)$ e $\left(-\frac{1}{k},\ -\frac{2}{k},\ \ldots,\ -\frac{n}{k},\ \ldots\right)$, conclui-se que $h\left(\frac{m}{k}\right)=a\left(\frac{m}{k}\right)^2+b\left(\frac{m}{k}\right)$ para todo número racional negativo $\frac{m}{k}$. Portanto, $h(x)=ax^2+bx$ para todo número racional x, como as funções

$h(x)$ e ax^2+bx são contínuas e coincidem no conjunto dos números racionais, tem-se que $h(x)=ax^2+bx$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Finalmente, tomando $f(0)=c$ em $h(x)=f(x)-f(0)$ obtém-se:

$$\begin{aligned} f(x) &= h(x)+f(0) \\ f(x) &= ax^2+bx+c, \end{aligned}$$

para todo $x\in\mathbb{R}$. ■

Na subseção a seguir, faremos uma generalização do **Teorema 4.1**, relacionando uma progressão aritmética de ordem k com um polinômio de grau k. Especificamente, demonstraremos que, dado uma função polinomial de grau k, a restrição do domínio desse polinômio ao conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é uma progressão aritmética de ordem K. Reciprocamente, provaremos que toda progressão aritmética de ordem k, x_n, possui, como termo geral, um polinômio de grau k em n.

4.1.1 Progressão aritmética e polinômios

Os resultados a seguir culminam na demonstração do Teorema **Teorema 4.8**, que generaliza a relação entre progressões aritméticas e funções polinomiais.

Teorema 4.5 (Teorema Fundamental da Somação)**.** Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência. Então,

$$\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = x_{n+1}-x_1.$$

Demonstração. De fato, como $\Delta x_n = x_{n+1}-x_n$, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}\Delta x_k &= \Delta x_1+\Delta x_2+\Delta x_3+\ldots+\Delta x_n \\ &= (\cancel{x_2}-x_1)+(\cancel{x_3}-\cancel{x_2})+(\cancel{x_4}-\cancel{x_3})+\ldots+(\cancel{x_n}-\cancel{x_{n-1}})+(x_{n+1}-\cancel{x_n}) \\ &= x_{n+1}-x_1. \end{aligned}$$

■

Teorema 4.6. A soma

$$\sum_{k=1}^{n}k^p = 1^p+2^p+3^p+\ldots+n^p$$

é um polinômio de grau $p+1$ em n.

Demonstração. Usaremos indução em p. De fato, para $p=1$, pelo **Exemplo 1** tem-se:

$$\begin{aligned} 1+2+3+\ldots+n &= \frac{n\cdot(n+1)}{2} \\ &= \frac{n^2}{2}+\frac{n}{2} \end{aligned}$$

que é um polinômio de grau 2 em n. Logo, o Teorema é valido para $p = 1$. Suponha que $1^m + 2^m + 3^m + \ldots n^m$ seja um polinômio de grau $m+1$ em n, para todo natural $m \in \{1, 2, 3, \ldots, p\}$. Considere a igualdade:

$$(k+1)^{p+2} = k^{p+2} + (p+2) \cdot k^{p+1} + \ldots + (p+2) \cdot k + 1.$$

Aplicando o somatório com k variando de 1 até n, obtemos:

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^{p+2} = \sum_{k=1}^{n} k^{p+2} + (p+2) \cdot \sum_{k=1}^{n} k^{p+1} + \ldots + (p+2) \cdot \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \qquad (*)$$

abrindo os dois primeiros somatórios em $(*)$ e simplificando os termos em ambos os membros da igualdade obtém-se:

$$\cancel{2^{p+2}} + \ldots + (n+1)^{p+2} = 1^{p+2} + \ldots + \cancel{n^{p+2}} + (p+2) \cdot \sum_{k=1}^{n} k^{p+1} + \ldots + (p+2) \cdot \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

isto é,

$$(n+1)^{p+2} = 1 + (p+2) \cdot \sum_{k=1}^{n} k^{p+1} + \ldots + (p+2) \cdot \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \qquad (**)$$

Finalmente, em $(**)$, isolando o somatório $\sum_{k=1}^{n} k^{p+1}$ obtém-se:

$$\sum_{k=1}^{n} k^{p+1} = \frac{1}{p+2} \cdot \left[(n+1)^{p+2} - 1 - \binom{p+2}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^p - \ldots - (p+2) \cdot \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 \right]$$

Pela hipótese de indução, tomando

$$f(n) = \binom{p+2}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^p - \ldots - (p+2) \cdot \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1$$

temos que $f(n)$ é um polinômio de grau $p+1$ em n. Segue daí que

$$\sum_{k=1}^{n} k^{p+1} = \frac{(n+1)^{p+2} - 1 - f(n)}{p+2}$$

é um polinômio de grau $p+2$ em n. ■

Corolário 4.7. Se F é um polinômio de grau p. Então

$$\sum_{k=1}^{n} F(k)$$

é um polinômio de grau $p+1$.

Teorema 4.8. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência cujo termo geral x_n é um polinômio em n de grau k. Então, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética de ordem k. A recíproca é válida, isto é, se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética de ordem k, tem-se que x_n é um polinômio de grau k em n (Morgado; Carvalho, 2022).

Demonstração. Usaremos indução em k. Com efeito, se $x_n = an + b$ com $a \neq 0$ (x_n é um polinômio de grau $k = 1$), então $x_n = (a+b,\ 2a+b,\ 3a+b,\ \ldots)$ é uma progressão aritmética de ordem 1 com razão $r = a$. Por outro lado, se x_n é uma progressão aritmética de ordem $k = 1$, então $x_{n+1} = x_1 + nr$, isto é, x_n é um polinômio de grau 1. Suponha que o Teorema seja válido para $m \in \mathbb{N}$ com $m \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ k\}$ e, vamos mostrar sua validade para $m = k+1$.

De fato, se x_n é um polinômio em n de grau $k+1$, então $y_n = \Delta x_n$ é um polinômio de grau k. Pela hipótese de indução, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética de ordem k. Portanto, da **Definição 2.4**, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética de ordem $k+1$. Por outro lado, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética de ordem $k+1$, então $y_n = \Delta x_n$ é uma progressão aritmética de ordem k. Portanto, pela hipótese de indução, y_n é um polinômio em n de grau k e. Pelo **Corolário 4.7**, $\sum_{k=1}^{n} y_k$ é um polinômio de grau $k+1$, segue-se do **Teorema 4.5** que:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} y_k &= \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \\ &= x_{n+1} - x_1.\end{aligned}$$

Portanto, x_n é um polinômio de grau $k+1$ e assim, concluímos a demonstração do Teorema. ■

5 EXEMPLOS E APLICAÇÕES.

Neste capítulo, apresentaremos alguns exemplos de exercícios envolvendo a relação entre progressões aritméticas de segunda ordem e funções quadráticas. Também abordaremos algumas aplicações das progressões aritméticas de primeira e segunda ordem na resolução de problemas que, muitas vezes, aparecem em provas conhecidas como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Esses problemas podem ser solucionados utilizando as relações estudadas neste trabalho.

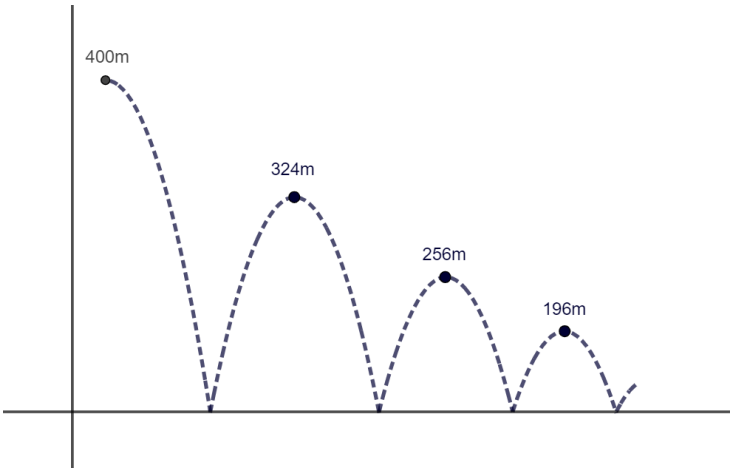
Com o objetivo de motivar o ensino e a prática dessas relações, construiremos soluções para problemas de funções polinomiais baseadas em progressões aritméticas. A ideia é tratar problemas de funções polinomiais como problemas de progressões aritméticas, fazendo as adaptações necessárias, quando possível, e buscando uma solução alternativa.

5.1 Progressão aritmética de segunda ordem

5.1.1 O problema da bola que pula

(Adaptação do problema da bola que pula, criada por Ediclaudio) Vamos supor que deixamos cair de uma altura de 400m uma bola que pula. Vamos supor também que foram registradas as alturas máximas atingidas pela bola nos três primeiros pulos, conforme a figura a seguir:

Figura 5 – A bola que pula



Fonte: Elaboração própria (2025)

Considerando que o padrão dos valores das alturas máximas se manterá para os próximos pulos, qual é a quantidade de pulos que a bola deverá dar até atingir a altura zero? Qual o valor da soma de todas as alturas máximas atingidas pela bola, incluindo a altura inicial?

Observando o gráfico, considere a sequência das alturas $x_n = (400,\ 324,\ 256,\ 196,\ \ldots)$ e a sequência $y_n = (324 - 400 = -76,\ 256 - 324 = -68,\ 196 - 256 = -60,\ \ldots)$. Note que y_n é uma progressão aritmética de razão $r = 8$. Assim, x_n é uma progressão aritmética de segunda

ordem e então:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{r}{2}n^2 + (y_0 - \frac{r}{2})n + x_0 \\ &= \frac{8}{2}n^2 + (-76 - \frac{8}{2})n + 400 \\ &= 4n^2 - 80n + 400. \end{aligned}$$

Para descobrir quantos pulos a bola dará até a altura ser zero (ou seja, a bola parar de pular), basta resolver em $\mathbb{N} \cup \{0\}$ a equação $4n^2 - 80n + 400 = 0$ e obter $n = 10$ (isso mostra que a sequência x_n possui 11 termos), como a primeira e a última altura (zero) não conta como pulo, a bola dará 9 pulos até atingir a altura zero. Por outro lado, para somar os termos da sequência $x_n = (400,\ 324,\ 256,\ 196,\ \ldots)$, utilizaremos a igualdade 4.3, ou seja,

$$S_{n+1} = \frac{r}{6}n^3 + \frac{y_0}{2}n^2 + \left(x_0 + \frac{y_0}{2} - \frac{r}{6}\right)n + x_0$$

onde $r = 8$ e $y_0 = -76$ correspondem, respectivamente, a razão e o primeiro termo da progressão aritmética $y_n = (324 - 400 = -76,\ 256 - 324 = -68,\ \ldots)$ associada a progressão aritmética de segunda ordem x_n, além disso, $x_0 = 400$ é o primeiro termo de x_n e $n = 10$. Portanto,

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{8}{6} \cdot 10^3 - \frac{76}{2} \cdot 10^2 + \left(400 - \frac{76}{2} - \frac{8}{6}\right) \cdot 10 + 400 \\ &= \frac{4}{3} \cdot 1000 - 38 \cdot 100 + \left(400 - 38 - \frac{4}{3}\right) \cdot 10 + 400 \\ &= \frac{4000}{3} - 3800 + \left(362 - \frac{4}{3}\right) \cdot 10 + 400 \\ &= \frac{4000}{3} - \frac{40}{3} - 3800 + 3620 + 400 \\ &= \frac{3960}{3} - 180 + 400 \\ &= 1320 + 220 = 1540m. \end{aligned}$$

□

5.1.2 Movimento uniformemente variado (M.U.V)

Na Física, o M.U.V é um tipo de movimento cujas características principais são: aceleração escalar constante e velocidade escalar que varia uniformemente com o tempo. A velocidade escalar média (v_m) é a razão entre o deslocamento de um móvel (Δs) e o correspondente intervalo de tempo (Δt), ou seja,

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Analogamente, a acelaração escalar média (a_m) é a razão entre a variação da velocidade escalar instantânea (Δv) e o correspondente intervalo de tempo (Δt), isto é,

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Observação 5.1. A velocidade escalar instantânea $v(t)$ (respectivamente, aceleração escalar instantânea $(a(t))$) representa, ao longo de uma tragetória, a velocidade (respectivamente, aceleração) de um móvel no tempo t. No caso do M.U.V, como a aceleração é constante, tem-se $a_m = a(t)$ para qual quer tempo t. Além disso, definimos $\Delta t = t - t_0$ e $\Delta s = s - s_0$, onde t e t_0 (respectivamente, s e s_0) correspondem ao tempo final e inicial (respectivamente, posição final e inicial) do movimento que está sendo estudado.

No M.U.V tem-se:

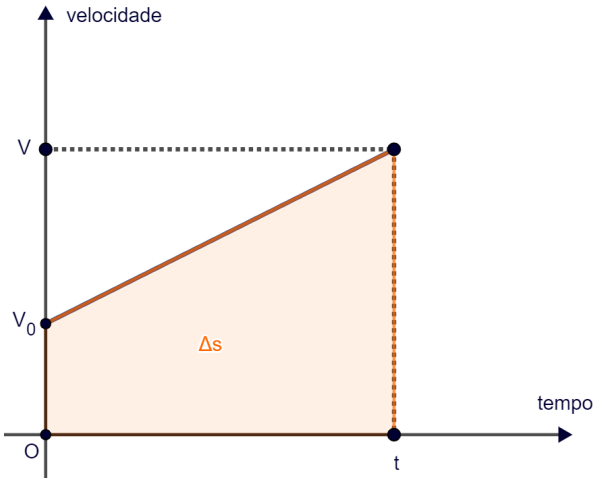
$$\begin{aligned} a &= a(t) \\ &= a_m \\ &= \frac{\Delta v}{\Delta t} \\ &= \frac{v - v_0}{t - t_0}. \end{aligned}$$

Tomando $t_0 = 0$, segue-se da última igualdade acima que $at = v - v_0$, isto é,

$$v = v_0 + at,$$

a qual é chamada de função horária da velocidade escalar para o M.U.V. Assim, seja t um número real não negativo; nesse caso, podemos associar a função $v = v(t) = v_0 + a(t)$ com a função afim estudada no Capítulo 3. Como exemplo, considere o esboço do gráfico da função v abaixo, onde v_0 é uma constante positiva. Note que, Δs é a área do trapézio abaixo do gráfico da função v.

Figura 6 – Velocidade em função do tempo no M.U.V



Fonte: Elaboração própria (2025)

Logo,

$$\begin{aligned}\Delta s &= \frac{(v+v_0)\cdot t}{2}\\ &= \frac{v_0+at+v_0}{2}\cdot t\\ &= \frac{2v_0+at}{2}\cdot t\\ &= v_0t+\frac{a}{2}t^2\end{aligned}$$

Como $\Delta s = s - s_0$, conclui-se da última igualdade que $s - s_0 = v_0t + \frac{a}{2}t^2$ obtendo assim a importante relação:

$$s = s(t) = s_0 + v_0t + \frac{a}{2}t^2,$$

a qual é chamada de função horária do espaço escalar para o M.U.V (Carron; Guimarães, 1997).

Dessa forma, podemos associar essa função com a função quadrática estudada no **capítulo 4**. Portanto, considerando a progresssão aritmética $(t_0,\ t_1,\ t_2,\ \ldots)$, tem-se que a sequência $(s(t_0),\ s(t_1),\ s(t_2),\ \ldots)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem pelo **Teorema 4.3**. Se $t_0 = 0,\ t_1 = 1,\ \ldots,\ t_n = n,\ \ldots$, então os pontos $(t_0, s(t_0)),\ (t_1, s(t_1)),\ \ldots,\ (t_n, s(t_n))$ pertencem ao gráfico da função quadrática $s(t) = s_0 + v_0t + \frac{a}{2}t^2$. Pela igualdade 4.1, tem-se:

$$a = r \qquad v_0 = y_0 - \frac{r}{2} \qquad \text{e} \qquad s_0 = x_0.$$

Exemplo 9. Um móvel em M.U.V descreve uma trajetória retilínia e sua posição $s(t)$, em metros (m), em função do tempo t, em segundos (s), é dada pela tabela a seguir:

Tabela 4 – Espaço em função do tempo no M.U.V

t	$s(t)$
0	5
1	5
2	1
3	-7
4	-19
5	-35
6	-55
...	...

Fonte: Elaboração própria (2025)

Vamos calcular a aceleração, a velocidade inicial, a posição inicial e a função horária do espaço escalar para esse móvel. Pelo que foi discutido acima, sejam:

$$x_n = (5,\ 5,\ 1,\ -7,\ -19,\ -35,\ -55,\ \ldots)$$

e $y_n = (5-5=0,\ 1-5=-4,\ -7-1=-8,\ -19-(-7)=-12,\ -35-(-19)=-16,\ -55-(-35)=-20,\ \ldots)$, como y_n é uma progressão aritmética de razão $r = -4$, tem-se que x_n é

uma progressão aritmética de segunda ordem. Segue-se que: $a = r = -4m/s^2$, $v_0 = y_0 - \frac{r}{2} = 0 - \frac{-4}{2} = 2m/s$ e $s_0 = x_0 = 5m$. Portanto, $s(t) = 5 + 2t - 2t^2$ é a função procurada.

□

5.1.3 Jogo salto da rã

Esse jogo consiste de um tabuleiro com 7 casas e 6 peças deixando a casa central livre. As regras do jogo são: cada peça só pode ser movida para uma casa vazia à frente, vizinha a sua ou saltando sobre, no máximo, uma peça. Além disso, não é permitido saltar por cima de duas peças ou mais, como também saltar para trás. (Barros, 2011)

O objetivo do jogo é inverter a posição das peças que estão de lados opostos em relação a casa vazia. A tabela abaixo mostra o número mínimo de movimentos necessário para mudar de posição as peças de cada cor

Tabela 5 – Jogo salto da rã

N° de peças de cada cor	Nº de movimentos necessários para inverter as peças
0	0
1	3
2	8
3	15
4	24
...	...
n	x_n

Fonte: Elaboração própria (2025)

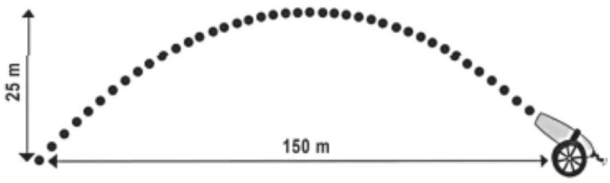
Note que a sequência $x_n = (0,\ 3,\ 8,\ 15,\ 24,\ \ldots)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem cuja progressão aritmética associada é $y_n = (3-0=3,\ 8-3=5,\ 15-8=7,\ 24-15=9,\ \ldots)$. Portanto $x_0 = 0$, $y_0 = 3$, $r = 5-3 = 2$. Para encontrar uma expressão para x_x, isto é, para saber a quantidade mínima de movimentos necessária para concluir o jogo, basta usar a igualdade 4.1. Logo,

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{r}{2}n^2 + \left(y_0 - \frac{r}{2}\right)n + x_0 \\ &= \frac{2}{2}n^2 + \left(3 - \frac{2}{2}\right)n + 0 \\ &= n^2 + 2n \end{aligned}$$

5.2 Progressões aritméticas e funções polinomiais

Exemplo 10. ENEM - 2018 - Questão 171 - Um projétil é lançado por um canhão e atinge o solo a uma distância de 150 metros do ponto de partida. Ele percorre uma trajetória parabólica, e a altura máxima que atinge em relação ao solo é de 25 metros.

Figura 7 – Trajetória parabólica do projétil



Fonte: Brasil (2018)

Admita um sistema de coordenadas xy em que no eixo vertical y está representada a altura e no eixo horizontal x está representada a distância, ambas em metro. Considere que o canhão está no ponto $(150;0)$ e que o projétil atinge o solo no ponto $(0;0)$ do plano xy. A equação da parábola que representa a trajetória descrita pelo projétil é
a) $y = 150x - x^2$
b) $y = 3750x - 25x^2$
c) $75y = 300x - 2x^2$
d) $125y = 450x - 3x^2$
e) $225y = 150x - x^2$. (Brasil, 2018, p. 28)

De fato, pela simetria da parábola, o ponto mais alto (vértice da parábola), possui coordenadas $(75,25)$. Como a sequência $(0,\ 75,\ ,\ 150,\ \ldots)$ forma uma progressão aritmética de razão $\overline{r} = 75$ e $n_0 = 0$, a sequência $x_n = (0,\ 25,\ 0,\ -75,\ \ldots)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem cuja progressão aritmética associada é $(25,\ -25,\ -75,\ \ldots)$. Segue-se que $x_0 = 0$, $y_0 = 25$ e $r = -50$, usando a igualdade 4.2 obtem-se:

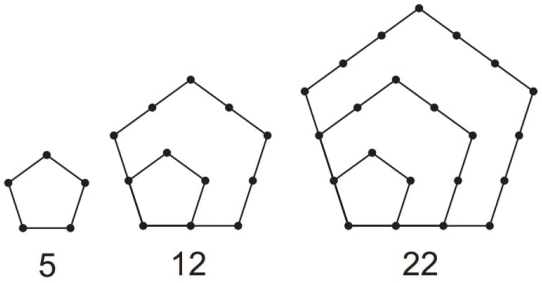
$$\begin{aligned}
x_n &= \frac{r}{2}\left(\frac{n-n_0}{\overline{r}}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{r}{2}\right)\left(\frac{n-n_0}{\overline{r}}\right) + x_0 \\
&= -\frac{50}{2}\left(\frac{n-0}{75}\right)^2 + \left(25 + \frac{50}{2}\right)\left(\frac{n-0}{75}\right) + 0 \\
&= -\frac{25}{75^2}n^2 + 50\left(\frac{n}{75}\right) \\
&= -\frac{n^2}{225} + \frac{150}{225}n
\end{aligned}$$

Portanto a função associada a x_n é $y = -\dfrac{x^2}{225} + \dfrac{150}{225}x$, isto é, $225y = 150x - x^2$.

□

Exemplo 11. OBMEP - 2015 - Questão 14 - Abaixo temos três figuras pentagonais: a primeira com 5 pontos, a segunda com 12 pontos e a terceira com 22 pontos. Continuando esse procedimento de construção, a vigésima figura pentagonal terá 651 pontos. Quantos pontos terá a vigésima primeira figura?

Figura 8 – Sequência de pentágonos.



Fonte: Brasil (2015)

A) 656
B) 695
C) 715
D) 756
E) 769 (Brasil, 2015, p. 3)

A sequência $x_n = (5,\ 12,\ 22,\ \ldots)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem cuja progressão aritmética associada é $y_n = (7,\ 10,\ 13,\ \ldots)$. Aplicando a igualdade 4.1 com $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $r = 3,\ x_0 = 5$ e $y_0 = 7$, o problema fica resolvido calculando x_{20} (como $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, x_{20} é o vigésimo primeiro termo da sequência x_n). Logo:

$$\begin{aligned} x_{20} &= \frac{3}{2} \cdot 20^2 + \left(7 - \frac{3}{2}\right) \cdot 20 + 5 \\ &= \frac{3}{2} \cdot 400 + \frac{11}{2} \cdot 20 + 5 \\ &= 600 + 110 + 5 = 715 \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 12. ENEM - 2013 - Questão 173 - O proprietário de uma casa de espetáculos observou que, colocando o valor da entrada a R$10,00, sempre contava com 1000 pessoas a cada apresentação, faturando R$10000,00 com a venda dos ingressos. Entretanto, percebeu também que, a partir de R$10,00, a cada R$2,00 que ela aumentava no valor da entrada, recebia para os espetáculos 40 pessoas a menos. Nessas condições, considerando P o número de pessoas presentes em um determinado dia e F o faturamento com a venda dos ingressos, a expressão que relaciona o faturamento em função do número de pessoas é dada por:

a) $F = \dfrac{-P^2}{20} + 60P$

b) $F = \dfrac{P^2}{20} - 60P$

c) $F = -P^2 + 1200P$

d) $F = \dfrac{-P^2}{20} + 60$

e) $F = P^2 - 1200P$ (Brasil, 2013. p. 29)

A tabela abaixo mostra o valor do faturamento em função do número de pessoas presentes.

Tabela 6 – Faturamento em função do némero de pessoas

P (N° de pessoas presentes)	F (Faturamento)
1000	$1000 \cdot 10 = 10000$
960	$960 \cdot 12 = 11520$
920	$920 \cdot 14 = 12880$
880	$880 \cdot 16 = 14080$
...	...

Fonte: Brasil (2013)

Note que a sequência $(1000,\ 960,\ 920,\ 880,\ \ldots)$ é uma progressão aritmética, tal que, $\overline{r} = -40$ e $n_0 = 1000$. Por outro lado, a sequência $x_n = (10000,\ 11520,\ 12880,\ 14080,\ \ldots)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem cuja progressão aritmética associada é $y_n = (1520,\ 1360,\ 1200,\ \ldots)$, logo $x_0 = 10000$, $y_0 = 1520$ e $r = -160$. Portanto, utilizando a igual-

dade 4.2, obtem-se:

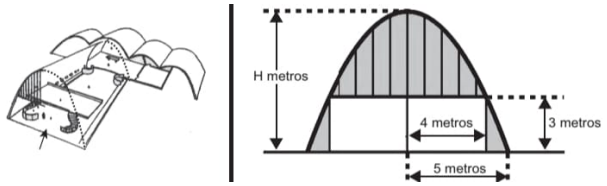
$$
\begin{aligned}
x_n &= \frac{r}{2}\left(\frac{n-n_0}{\bar{r}}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{r}{2}\right)\left(\frac{n-n_0}{\bar{r}}\right) + x_0 \\
&= -\frac{160}{2}\left(\frac{n-1000}{-40}\right)^2 + \left(1520 + \frac{160}{2}\right)\left(\frac{n-1000}{-40}\right) + 10000 \\
&= -\frac{80}{40^2}(n-1000)^2 + \frac{1600}{-40}(n-1000) + 10000 \\
&= -\frac{1}{20}(n-1000)^2 - 40(n-1000) + 10000 \\
&= -\frac{n^2}{20} + 100n - 40n - 50000 + 40000 + 10000 \\
&= -\frac{n^2}{20} + 60n
\end{aligned}
$$

Portanto a equação procurada é $F = -\dfrac{P^2}{20} + 60P$.

□

Exemplo 13. ENEM - 2017 - Questão 176 - A igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A Figura da esquerda ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A figura da direita fornece uma vista frontal dessa abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos. Qual a medida da altura H, em metro, indicada na figura 2?

Figura 9 – Abóbada da igreja de São Francisco de Assis



Fonte: Brasil (2017a)

a) 16/3
b) 31/5
c) 25/4
d) 25/3
e) 75/2 (Brasil, 2017a, p. 30)

Da figura acima, fazendo o ponto $(0,0)$ coincidir com a origem do plano cartesiano, podemos extrair os pontos $(0,0)$, $(1,3)$, $(5,\mathrm{H})$, $(9,3)$, $(10,0)$. Observe a tabela abaixo

Como $(0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ é uma progressão aritmética, a sequência x_n é uma progressão aritmética de segunda ordem. Segue-se, por definição, que Δx_n é uma progressão aritmética de primeiro termo 3 e décimo termo -3, da expressão do termo geral obtem-se

$$
\begin{aligned}
\Delta x_n &= \Delta x_1 + (n-1)r \\
-3 &= 3 + (10-1)r \\
-3 &= 3 + 9r
\end{aligned}
$$

Tabela 7 – Pontos da abóbada ilustrada

n	x_n	Δx_n
0	0	3
1	3	a-3
2	a	b-a
3	b	c-b
4	c	H-c
5	H	d-H
6	d	e-d
7	e	f-e
8	f	3-f
9	3	-3
10	0	

Fonte: Elaboração própria (2025)

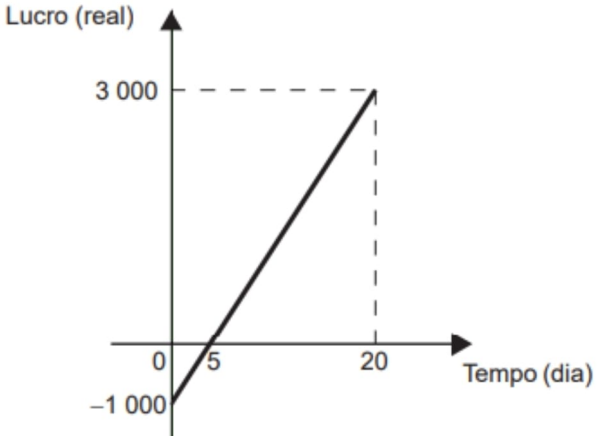
Portanto, $r = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}$ e $\Delta x_n = \left(3,\ 3-\frac{2}{3}=\frac{7}{3},\ \frac{7}{3}-\frac{2}{3}=\frac{5}{3},\ \frac{5}{3}-\frac{2}{3}=1,\ 1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\right)$. Assim, $a = \frac{7}{3}+3 = \frac{16}{3}$, $b = \frac{5}{3}+\frac{16}{3} = \frac{21}{3}$, $c = 1+\frac{21}{3} = \frac{24}{3}$ e, finalmente

$$H = \frac{1}{3}+\frac{24}{3} = \frac{25}{3}$$

□

Exemplo 14. ENEM - 2017 - Questão 170 - Em um mês, uma loja de eletrônicos começa a obter lucro já na primeira semana. O gráfico representa o lucro (L) dessa loja desde o início do mês até o dia 20. Mas esse comportamento se estende até o último dia, o dia 30.

Figura 10 – Lucro em função do tempo



Fonte: Brasil (2017b)

A representação algébrica do lucro (L) em função do tempo (t) é
a) $L(t) = 20t + 3000$
b) $L(t) = 20t + 4000$
c) $L(t) = 200t$

d) $L(t) = 200t - 1000$
e) $L(t) = 200t + 3000$ (Brasil, 2017b, p. 27)

Com efeito, o gráfico acima forne os pontos $(0, -1000)$, $(5, 0)$ e $(20, 3000)$. Como o gráfico é um segmento de reta, pode-se o relacionar a função afim $L(x)$ e nesse caso, a relação entre a função afim e a progressão aritmética. De fato, pela igualdade a razão r da progressão aritmética (x_n) associada a essa função afim é dada por

$$\begin{aligned} r &= \frac{L(20) - L(5)}{20 - 5} \\ &= \frac{x_{20} - x_5}{15} \\ &= \frac{3000 - 0}{15} \\ &= 200 \end{aligned}$$

Por outro lado, $x_1 = L(1) = x_5 - 4r = 0 - 4 \cdot 200 = -800$. Logo, de $x_n = x_1 + (n-1)r$, obtem-se $x_n = 200n - 200 - 800$, ou seja, $x_n = 200n - 1000$. Segue-se que a equação procurada é $L(t) = 200t - 1000$.

$\square$

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta monografia, demonstramos como as funções polinomiais se relacionam com as progressões. Especificamente, estudamos as conexões entre a função afim e a progressão aritmética, bem como entre a função quadrática e a progressão aritmética de segunda ordem. Para isso, abordamos esses conceitos, mostrando, por exemplo, que a sequência obtida pela restrição do domínio de uma função quadrática (ou afim) ao conjunto dos números naturais é uma progressão aritmética de segunda ordem (ou uma progressão aritmética, respectivamente). Além disso, generalizando essas relações, mostramos que uma sequência é uma progressão aritmética de ordem k se, e somente se, seu termo geral for um polinômio de grau k em n, onde n e k são números naturais.

Nesse sentido, mostramos que uma função é quadrática se, e somente se, transforma toda progressão aritmética em uma progressão aritmética de segunda ordem. Finalizamos o trabalho com alguns exemplos e aplicações de provas do Exame Nacional do Ensino Médio. Com este trabalho, buscamos motivar os professores do ensino médio a utilizarem essas relações nas práticas pedagógicas em sala de aula, como uma ferramenta adicional para que os alunos compreendam e resolvam problemas que envolvem esses conteúdos.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, Ana Cristina Gomes. **Função quadrática**: caracterização e aplicações. 2013. 66 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Cuité, 2013.

BARROS, Rafael José Alves do Rego. **A utilização de jogos concretos na aprendizagem de indução finita no ensino superior**. 2011. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências) - Universidade Federal Rural Pernambuco, Recife, 2011.

BELINI, Marcelo Manechine. **A razão áurea e a sequência de Fibonacci**. 2015. Dissertação (Mestrado-Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação-Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015. Disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-06012016-161056/publico/MarceloManechineBelini_dissertacao_revisada.pdf. Acesso em: 1 jun. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: Ensino Médio. Brasilia, DF, 2018. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/cne/bncc-2013-ensino-medio. Acesso em: 25 maio. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. **11ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Publicas**: OBMEP 2015. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2015. Nível 3-Ensino Médio-1ª fase. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1A8gk7I8maNZuf9sJjb93BfEdb6WFgbW-/view?usp=drivesdk. Acesso em: 01 jun. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anisio Teixeira. **Exame Nacional do Ensino Médio**: prova de matemática e suas tecnologias. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2013. 2° dia-caderno 6-Cinza-Reaplicação/PPL. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2013/2013_PV_reaplicacao_PPL_D1_CD6.pdf. Acesso em: 1 jun. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anisio Teixeira. **Exame Nacional do Ensino Médio**: prova de matemática e suas tecnologias. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2014. 2° dia-caderno 5-Amarelo-Aplicação regular. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2014/2014_PV_impresso_D2_CD5.pdf. Acesso em: 1 jun. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anisio Teixeira. **Exame Nacional do Ensino Médio**: prova de matemática e suas tecnologias. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2017a. 2° dia-caderno 5-Amarelo-Aplicação regular. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2017/2017_PV_impresso_D2_CD5.pdf. Acesso em: 2 jun. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anisio Teixeira. **Exame Nacional do Ensino Médio**: prova de matemática e suas tecnologias. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2017b. 2° dia-caderno 6-Cinza-Reaplicação/PPL. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/ppl/2017/provas/P2_06_CINZA.pdf. Acesso em: 2 jun. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anisio Teixeira. **Exame Nacional do Ensino Médio**: prova de matemática e suas tecnologias. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018. 2° dia-caderno 17-Amarelo-Reaplicação/PPL. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2018/2018_PV_reaplicacao_PPL_D2_CD17.pdf. Acesso em: 1 jun. 2025.

CARRON, Wilson; GUIMARÃES, Osvaldo. **As faces da física**. São Paulo: Moderna, 1997.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto aplicações. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016. vol. 1.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**: volume 1. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise vol.1**. 14. ed. Rio de Janeiro: IMPA - Projeto Euclides, 2013.

LIMA, Elon Lages. **Números e funções reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática discreta**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.

RAMOS, Everton da Silva. **Um estudo elementar sobre progressões aritmético-geométricas - PAG**. 2024. Monografia (Graduação em Matemática - Licenciatura) - Universidade Federal de Alagoas, Arapiraca, 2024.