UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS - UFAL
***CAMPUS* DE ARAPIRACA**
MATEMÁTICA - BACHARELADO

JOSÉ RONISON BEZERRA RODRIGUES

A IRRACIONALIDADE DAS CONSTANTES MATEMÁTICAS *PI* E NÚMERO DE EULLER

ARAPIRACA
2025

José Ronison Bezerra Rodrigues

A irracionalidade das constantes matemáticas *pi* e número de Euller

Monografia apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciatura em Matemática - Bacharelado da Universidade Federal de Alagoas - UFAL, *Campus* de Arapiraca.

Orientador: Prof. Dr. Moreno Pereira Bonutti

Arapiraca
2025

Universidade Federal de Alagoas – UFAL
Campus Arapiraca
Biblioteca Setorial *Campus* Arapiraca - BSCA

R696i Rodrigues, José Ronison Bezerra
A irracionalidade das constantes matemáticas *pi* e o número de Euller [recurso eletrônico] / José Ronison Bezerra Rodrigues. – Arapiraca, 2024.
28 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Moreno Pereira Bonutti.
Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Alagoas, *Campus* Arapiraca, Arapiraca, 2024.
Disponível em: Universidade Digital (UD) / RD- BSCA– UFAL (*Campus* Arapiraca).
Referências: f. 28.

1. Euller, Número de. 2. Número *pi*. 3. Irracionalidade. I. Bonutti, Moreno Pereira, orient. II. Título.

CDU 51

Bibliotecário responsável: Nestor Antonio Alves Junior
CRB-4 / 1557

José Ronison Bezerra Rodrigues

A irracionalidade das constantes matemáticas *pi* e número de Euller

Monografia apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciatura em Matemática - Bacharelado da Universidade Federal de Alagoas - UFAL, *Campus* de Arapiraca.

Data de aprovação: 09 / 05 / 2025

Banca Examinadora

Documento assinado digitalmente
MORENO PEREIRA BONUTTI
Data: 13/05/2025 07:41:26-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Moreno Pereira Bonutti
Universidade Federal de Alagoas - UFAL
Campus de Arapiraca
(Orientador)

Documento assinado digitalmente
JOSE DA SILVA BARROS
Data: 13/05/2025 08:21:58-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. José da Silva Barros
Universidade Federal de Alagoas - UFAL
Campus de Arapiraca
(Examinador)

Documento assinado digitalmente
JOSE FABIO BOIA PORTO
Data: 29/05/2025 11:25:23-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. José Fábio Boia Porto
Universidade Federal de Alagoas - UFAL
Campus de Arapiraca
(Examinador)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, pois, sem Ele, jamais teria tido forças para chegar até aqui. Agradeço à minha família, que sempre me apoiou, em especial à minha esposa, que esteve ao meu lado durante todo esse tempo. Também agradeço aos professores e colegas de curso, por terem tornado a caminhada até aqui mais proveitosa e divertida.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo demonstrar a irracionalidade de duas constantes matemáticas fundamentais: os números π e e. Para isso, adotam-se abordagens clássicas consolidadas na literatura matemática. A irracionalidade de π é demonstrada a partir da prova apresentada por Ivan Niven (1915–1999), reconhecido por suas contribuições à teoria dos números. Já a irracionalidade de e é abordada com base nos argumentos desenvolvidos na obra *e: A História de um Número* (1994). O estudo fundamenta-se em conceitos de análise real, utilizando técnicas e demonstrações formais presentes em obras como (Neri, 2019) e (Lima, 2004) . Além da fundamentação teórica, o trabalho inclui um breve resgate histórico sobre o desenvolvimento e a importância dessas constantes na matemática. O conteúdo apresentado visa contribuir para a compreensão do rigor matemático envolvido em demonstrações de irracionalidade, bem como destacar a relevância dessas constantes em diferentes contextos científicos.

Palavras-chave: número pi; número de Euller; irracionalidade.

ABSTRACT

This study aims to demonstrate the irrationality of two fundamental mathematical constants: the numbers π and e. To achieve this, classical approaches well-established in the mathematical literature are employed. The irrationality of π is demonstrated through the proof presented by Ivan Niven (1915–1999), known for his contributions to number theory. The irrationality of e is addressed based on the arguments developed in the book *e: The Story of a Number* (1994). The study is grounded in concepts from real analysis, employing formal techniques and demonstrations found in works such as (Neri, 2019) and (Lima, 2004). In addition to the theoretical foundation, the work includes a brief historical overview of the development and significance of these constants in mathematics. The content presented seeks to contribute to the understanding of the mathematical rigor involved in irrationality proofs, as well as to highlight the relevance of these constants in various scientific contexts.

Keywords: number pi; Euller number; irrationality.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 7

2 PRELIMINARES 8

2.1 SEQUÊNCIA E SÉRIES 8

2.1.1 Sequência 8

2.1.2 Séries 11

2.2 REGRAS DE DERIVAÇÃO 13

2.3 TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO (PARTE 2) 14

3 NÚMERO DE EULER e 16

3.1 HISTÓRIA DO NUMERO DE EULLER 16

3.2 EXISTÊNCIA DO $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$ 17

3.3 IRRACIONALIDADE DO NÚMERO DE EULLER 20

4 O NÚMERO pi 22

4.1 MOTIVAÇÃO 22

4.2 IRRACIONALIDADE DE pi 22

5 CONCLUSÃO 27

REFERÊNCIAS 28

1 INTRODUÇÃO

Os números surgiram na necessidade de contar objetos em atividades cotidianas, como a agricultura. Ao longo do tempo foram sendo desenvolvidos sistemas numéricos como na antiga Mesopotâmia que desenvolveu um sistema numérico posicional de base 60 (sexagesimal), que influenciou a contagem de tempo e ângulos que usamos até hoje.

Os gregos já tinham um conhecimento sobre fração quando influenciados pelas ideias de Pitágoras e Euclides, introduziram conceitos abstratos sobre números, como números racionais e irracionais.

Os pitagóricos, influenciados pela crença de que "tudo é número", consideravam que qualquer quantidade poderia ser expressa como razão entre inteiros. Assim eles também faziam aproximações para o número pi (π) que é a razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro. Essa visão foi profundamente abalada com a descoberta da irracionalidade de $\sqrt{2}$ — atribuída a Hipaso de Metaponto — que demonstrou a existência de números que não podem ser expressos como fração como consta em (Boyer; Merzbach, 2019) . Tal descoberta teve um impacto filosófico significativo na matemática grega. Essa foi a primeira evidência da existência dos números irracionais.

Já o número de Euler, denotado como "e", é uma constante matemática importante que surge em diversos contextos no estudo da matemática e em diversas áreas como: física em modelos de decaimento radioativo, matemática financeira, em fórmulas de juros compostos contínuos, entre outras aplicação que também a contante é de suma importância. A história por trás do número de Euler remonta ao século XVII e está ligada ao estudo do crescimento exponencial e à resolução de problemas relacionados a taxas de mudança. Ele surge naturalmente quando Jakob Bernoulli (1655–1705), um matemático suíço, estava tentando calcular o limite de $(1 + 1/n)^n$ quando n tende ao infinito e encontrou o valor aproximado de e

O trabalho esta divido em 4 capítulos onde a proposta do trabalho que é demonstrar a irracionalidade das duas contantes, e e π, esta presente nos capítulos 3 e 4, no capitulo 3 iremos a principio verificar como que surgi a constante e e posteriormente construir a demostração partindo da suposição que a constante seja racional então chegando em uma contradição. Já no capitulo 4 será demostrado a irracionalidade da constante π baseando-se na demostração de Ivan Niven (1915–1999) que também consiste supor que π seja racional para chegar em uma contradição. No próximo capitulo será apresentado alguns resultados preliminares que servirão como ferramentas para a demonstração deste trabalho.

2 PRELIMINARES

Nesse capítulo será apresentado definições e resultados que serão usados nos próximos capítulos. Buscamos ser bastante sintéticos, demostrando alguns resultados e teoremas que serão de suma importância para a demostração da irracionalidade dos números π e e.

2.1 SEQUÊNCIA E SÉRIES

A noção de limite tem um papel central neste trabalho, pois são dai que sai resultados importantes como alguns teoremas ou definições que serão necessários para a construção do trabalho. Para isso apresentaremos alguns resultados sobre limites de sequências e séries que será usados nos capítulos 3 e 4 desse trabalho.

2.1.1 Sequência

Nesta seção será abordado um pouco sobre a definição de sequência e alguns teoremas que é muito importe para a demostração da irracionalidade do número e que também pode ser escrito como uma sequência, por isso a importância da seção.

Definição 2.1.1. Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ em que o valor $x(n)$ é denotado como x_n, onde n representa a ordem de cada termo da sequência x. Escreve-se $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ ou (x_n) para indicar a sequência x.

- Uma sequência é dita limitada quando ela é limitada superiormente e inferiormente ou seja:
- limitada superiormente quando existe um número real a tal que $x_n \leq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $x_n \in (-\infty, a]$.
- Limitada inferiormente quando existe um número real b tal que $x_n \geq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $x_n \in (b, +\infty]$.
- Uma sequência x_n é crescente quando $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja:

  $$x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \ldots.$$

  Se $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então essa sequência é não-decrescente.
- Uma sequência x_n é decrescente quando $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja:

  $$x_1 > x_2 > \cdots > x_n > \ldots.$$

  Se $x_n \geq x_{n+1}$para todo $n \in \mathbb{N}$, então essa sequência é não-crescente.

As sequências crescentes, não-decrescentes, decrescentes e não-crescentes são chamadas de sequências monótonas.

Definição 2.1.2. O **supremo** (ou **menor cota superior**) de uma sequência (x_n), se ele existir, é o menor número real que é maior ou igual a todos os elementos dessa sequência. Ou seja:

- O supremo de (x_n), denotado por $\sup(x_n)$, é um número $a \in \mathbb{R}$ tal que:

  1. $x_n \leq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (ou seja, a é uma cota superior para (x_n);
  2. Para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um termo da sequência $x_{n'}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n'} \leq a$ (ou seja, a é o menor valor que é uma cota superior).

De forma análoga, o **ínfimo** (ou **maior cota inferior**) de uma sequência (x_n), se ele existir, é o maior número real que é menor ou igual a todos os elementos dessa sequência. Ou seja:

- O ínfimo de (x_n), denotado por $\inf(x_n)$, é um número $b \in \mathbb{R}$ tal que:

  1. $x_n \geq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (ou seja, b é uma cota inferior para (x_n);
  2. Para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um termo da sequência $x_{n'}$ tal que $b \leq x_{n'} < b + \varepsilon$ (ou seja, b é o maior valor que é uma cota inferior).

Observações:

- O supremo e o ínfimo de uma sequência são valores que a sequência "alcança" ou "se aproxima" nos limites superiores e inferiores.
- Quando uma sequência é limitada superiormente e inferiormente, esses valores (supremo e ínfimo) sempre existirão e estarão dentro do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.
- O supremo e o ínfimo de uma sequência também são pontos de interesse em relação ao comportamento limite da sequência, especialmente em estudos de convergência.

Exemplo 2.1.1. Se $x_n = \dfrac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $x = \left(1, \dfrac{1}{2}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots\right)$ é uma sequência limitada e decrescente, pois $x_n \in (0, 1]$ e $x_{n+1} < x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Exemplo 2.1.2. Dado $a \in \mathbb{N}$, $0 < a < 1$, seja

$$x_n = 1 + a + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Então, (x_n) é uma sequência crescente, pois $x_{n+1} = x_n + a^{n+1} > x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$; e é limitada, pois $1 < x_n < \frac{1}{1-a}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Em particular, se $a = \frac{1}{2}$, temos que

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}}{1 - \dfrac{1}{2}} < \frac{1}{1 - \dfrac{1}{2}} = 2$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.1.3. Seja $a_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$. A sequência (a_n) é crescente e é limitada, pois

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + 2 = 3,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.1.4. Seja $b_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$. A fórmula do binômio de Newton (que pode ser provada por indução) nos dá

$$\begin{aligned} b_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} \\ &\quad + \cdots + \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{n!}\frac{1}{n^n} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} b_n = 1 + 1 &+ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \\ &+ \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Como $1 - \frac{j}{n} > 0$, para $1 \leq j \leq n - 1$, temos que cada b_n é uma soma de parcelas positivas. Além disso, cada parcela cresce com n, pois $\left(1 - \frac{j}{n}\right) \to 1$ para $1 \leq j \leq n - 1$ e, também, o número de parcelas cresce com n.

Logo, $b_{n+1} > b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, (b_n) é uma sequência crescente.

Observe ainda que (b_n) é uma sequência limitada, pois

$$0 < b_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots < 3,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.1.3. Uma sequência é dita convergente se existe $a \in \mathbb{R}$ de modo que para cada número $\epsilon > 0$ é possível obter um número natural n_0 tal que $|x_n - a| < \epsilon$, para todo $n > n_0$. Em outras palavras

$$a = \lim_{n \to \infty} x_n \Longleftrightarrow \forall\ \epsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}; |x_n - a| < \epsilon; n > n_0.$$

Assim, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ se, e somente se, todo intervalo aberto de centro a contém todos os termos x_n da sequência, salvo, talvez, para um número finito de índices n.

Exemplo 2.1.5. Seja $x \in \mathbb{R}$ e considere a sequencia dado por $x_n = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos que $x_n \to x$. De fato pois $|x_n - x| = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, podemos escrever que

$$\forall\ \epsilon > 0, n \geq 1 \Rightarrow |x_n - x| < \epsilon$$

Teorema 2.1.1. Toda sequência monótona e limitada é convergente

Demonstração: suponha que x_n seja não-decrescente, ou seja, $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $b \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e seja $a = sup(x_n)$. Iremos mostrar que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Posto que $\epsilon > 0$, assim $a - \epsilon < a$ e $a - \epsilon$ não é cota superior do conjunto dos termos da sequência x_n. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \epsilon < x_{n0} \leq a$, como $x_n \geq x_{n_0}$ para todo $n \leq n_0$, então

$$a - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq a < a + \epsilon\ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Assim, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Agora suponha que x_n seja não-crescente, ou seja $x_n \geq x_{n+1}$ isso para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \geq m$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e seja $L = inf(x_n)$. Iremos mostrar que $\lim_{n\to\infty} x_n = L$.

Sabendo que existe $\epsilon > 0$, assim $L + \epsilon > L$ e $L + \epsilon$ não é cota inferior do conjunto dos termos da sequência x_n. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L + \epsilon > x_{n_0} \geq L$, como $x_n \leq x_{n_0}$ para todo $n \geq n_0$, então

$$L \leq x_n \leq x_{n_0} < L + \epsilon\ \forall\ n \in \mathbb{N}$$

. Ou seja, $|x_n - L| < \epsilon$ assim $\lim_{n\to\infty} x_n = L$.

2.1.2 Séries

A parti de uma sequência de números naturais (x_n) formamos uma nova sequência (S_n), cujo termos são as somas:

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, n \in \mathbb{N},$$

que chamamos de somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, a parcela x_n é chamada de termo geral da série. Escrevemos $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} S_n$, se o limite existir e, nesse caso, ele é dito o limite da série, dizemos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente ou divergente se (S_n) é convergente ou divergente respectivamente.

Teorema 2.1.2. (Teste da comparação) Seja x_n e y_n, tais que $0 \leq x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ implica na convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ enquanto a divergência de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ acarreta na divergência de $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$

Demonstração: Seja S_n e T_n as sequência das somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ respectivamente:

- Se $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge então existe um $c > 0$ tal que $T_n < c$, como $x_n \leq y_n$ segue que $S_n \leq T_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo a sequência S_n também converge, pois $S_n < c$. Assim, a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

- Se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge então a sequência S_n não é limitada ou seja ela tende a ∞. Então $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ diverge, já que $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Exemplo 2.1.6. A série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ é

- **Divergente**, se $|a| \geq 1$, pois, neste caso, seu termo geral a^n não tende para zero.

- **Convergente**, se $|a| < 1$, pois, neste caso, a sequência das reduzidas das ordens é

$$s_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a},$$

que tende para $\frac{1}{1-a}$. Isto é,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}, \quad \text{se } |a| < 1.$$

Exemplo 2.1.7. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ é convergente e sua soma é 1.

De fato, como $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, a reduzida de ordem n da série é

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n \to \infty} s_n = 1.$$

Teorema 2.1.3. (Teste da Razão, ou de d'Alembert) seja (x_n) uma sequência de números estritamente positivos.

Se $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente

Se $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é divergente.

Demonstração. Tomemos um $c \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < c < 1$. Então existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{x_{n+1}}{x_n} < c$ para todo $n \geq n_0$, ou seja, $x_{n+1} < cx_n$. Assim temos

$$\begin{aligned}
&x_{n_0+1} < cx_{n_0} \\
&x_{n_0+2} < cx_{n_0+1} < c^2 x_{n_0} \\
&x_{n_0+3} < cx_{n_0+2} < c^3 x_{n_0} \\
&\vdots \\
&x_n < c^j x_{n_0}; j \in \mathbb{N}^*.
\end{aligned}$$

Note que $x_n > 0$, assim $0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < c < 1$, dai $0 < c < 1$ assim o $\sum_{j=1}^{\infty} c^j x_{n_0}$ é uma série geométrica de razão $c \in (0, 1)$ logo convergente. Dessa forma pelo teste da comparação temos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ também converge.

Agora se $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ para todo $n \geq n_0$, por tanto $x_{n+1} > x_n$, dai segue que:

$$x_{n_0} < x_{n_0+1} < x_{n_0+2} < \dots$$

Assim a sequência dos termos gerais da série é crescente e por tanto não tende a zero. Logo, a série é divergente

Exemplo 2.1.8. Seja a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ onde $x \in \mathbb{R}$.

Como $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1}$ e perceba que $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$, temos então que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ é convergente para todo $x \in \mathbb{R}$.

2.2 REGRAS DE DERIVAÇÃO

A derivada é uma ferramenta utilizada para o estudo de taxa de variação seja em qualquer que for o ramo da ciências ou também podemos vela ao encontrar a inclinação de uma reta tangente como consta no (Stewart 2015), de maneira geral podemos definir as derivadas da seguinte maneira:

Definição 2.2.1. Seja f uma função definida em um intervalo que contém o ponto a. A derivada de f em a, denotada por $f'(a)$, é definida como:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

caso esse limite exista.

Derivada como função: Se a derivada de f existe para todo x em um intervalo, podemos definir a **função derivada** f' por:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Nesse caso, f' é uma nova função que representa a derivada de f em cada ponto x do intervalo.

Teorema 2.2.1. (Regras de derivação) sejam $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriváveis em $a \in \mathbb{A}$ e seja $c \in \mathbb{R}$. Temos:

- $f \pm g$ é derivável em a e $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$;
- cf é derivável em a e $(cf)'(a) = cf'(a)$;
- fg é derivável em a e $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;
- se $g(a) \neq 0$, então $\dfrac{f}{g}$ é derivável em a e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

As demostrações dessas regras são feitas de forma direta através das propriedades de limites que estão dispostas no (Stewart 2015).

2.3 TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO (PARTE 2)

Esse teorema ele faz a ligação entre as derivadas e integrais ele pode ser dividido em duas parte e a que será utilizada neste trabalho será a parte 2 que esta sendo demonstrada de forma mais direta, mas também pode-se ser vista nos livros de analise como , demonstrações mais rigorosas que envolve conceitos de convergência,limites e outras ferramentas analíticas, que diz o seguinte.

Se f é integrável $[a, b]$ e, se F é derivável em $[a, b]$ e $f = F'$ é integrável em $[a, b]$ então

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

.

Demonstração:

Por hipótese, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Consideramos a integral definida de f de a até b:

$$I = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Pela definição da integral definida como limite de somas de Riemann, temos:

$$I = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta x_i,$$

onde $\|P\|$ é a norma da partição P de $[a, b]$, x_i^* são pontos de amostragem em cada subintervalo, e Δx_i são os comprimentos dos subintervalos.

Agora, como F é uma primitiva de f, temos que:

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) \approx f(x_i) \Delta x_i$$

para intervalos pequenos Δx_i. Assim, a soma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta x_i$ se aproxima de $F(b) - F(a)$ quando a partição se refina. Portanto:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Logo, a integral definida de f é dada pela diferença entre os valores de F em b e a.

3 NÚMERO DE EULER e

3.1 HISTÓRIA DO NUMERO DE EULLER

O número de Euler, denotado como "e", é uma constante matemática importante que surge em diversos contextos, especialmente na análise matemática. A história por trás do número de Euler remonta ao século XVII e está ligada ao estudo do crescimento exponencial e à resolução de problemas relacionados a taxas de mudança.

A história do número de Euler foi bem documentada por diversos matemáticos ao longo do tempo, incluindo Leonhard Euler, o proeminente matemático suíço do século XVIII, que deu nome à constante. O livro (Maor, 2011) do matemático israelense Eli Maor é uma referência popular sobre a história do número de Euler.

De acordo com esse livro e outras fontes, o número de Euler surge naturalmente em situações de crescimento exponencial contínuo, quando Jakob Bernoulli (1655–1705), um matemático suíço, estava tentando calcular o limite de $(1 + 1/n)^n$ quando n tende ao infinito e encontrou o valor aproximado de e. Esse número foi estudado em detalhes por Euler e outros matemáticos, que descobriram suas propriedades notáveis em diversas áreas da matemática, incluindo análise, cálculo e teoria dos números.

Euler demonstrou que o número e está intimamente ligado à função exponencial, sendo a base natural para esta função. A constante e é encontrada em fórmulas que descrevem fenômenos como: crescimento populacional, decaimento radioativo, juros compostos e muitos outros. Veja um exemplo de como ele aparece em Juros compostos: primeiro, considere um capital inicial P que é investido a uma taxa de juros anual r. Se os juros são compostos n vezes ao ano, o montante A após um ano é dado por:

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n.$$

A medida que aumentamos n (ou seja, aumentamos a frequência com que os juros são compostos), o montante A após um ano se aproxima de um valor limite. Em outras palavras, conforme $n \to \infty$ (composição contínua), essa expressão tende a:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

Para entender o que acontece neste limite, podemos focar na expressão $b_n = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$, abaixo segue uma tabela coma a aproximação de b_n fixando $r = 1$

Pela tabela 1 pode-se dizer que b_n é aproximadamente $2,718$, isso ocorre porque, matematicamente, temos que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Portanto, substituindo r na expressão acima, obtemos que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = e^r$$

Aproximação de b_n com diferentes valores de n

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	b_n
1	$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1$	2
2	$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$	$2,25$
5	$\left(1+\frac{1}{5}\right)^5$	$\approx 2,488$
10	$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}$	$\approx 2,5937$
50	$\left(1+\frac{1}{50}\right)^{50}$	$\approx 2,6925$
100	$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}$	$\approx 2,7048$
500	$\left(1+\frac{1}{500}\right)^{500}$	$\approx 2,7163$
1.000	$\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}$	$\approx 2,718$
5.000	$\left(1+\frac{1}{5000}\right)^{5000}$	$\approx 2,7181$
10.000	$\left(1+\frac{1}{10000}\right)^{10000}$	$\approx 2,7182$
50.000	$\left(1+\frac{1}{50000}\right)^{50000}$	$\approx 2,71827$
100.000	$\left(1+\frac{1}{100000}\right)^{100000}$	$\approx 2,71828$
500.000	$\left(1+\frac{1}{500000}\right)^{500000}$	$\approx 2,718281$
1.000.000	$\left(1+\frac{1}{1000000}\right)^{1000000}$	$\approx 2,718282$
10.000.000	$\left(1+\frac{1}{10000000}\right)^{10000000}$	$\approx 2,718282$

Fonte: Adaptada de (Maor, 2011).

Logo, quando os juros são compostos continuamente, o montante A após um ano é dado por:

$$A = P \cdot e^r$$

Para um período de tempo t, o montante se torna:

$$A = P \cdot e^{rt}$$

Assim o número e tornou-se o primeiro número a ser definido por um processo de limite. Essa relação mostra que e está intimamente ligado a processos de crescimento contínuo e exponencial, sendo fundamental em diversas áreas, incluindo finanças e ciências naturais.

Na próxima seção será demostrado a existência de e como consta na tabela 1, atreves da expressão $(1 + 1/n)^n$.

3.2 EXISTÊNCIA DO $\lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n$

Na seção anterior foi visto que o número e surge naturalmente de um crescimento exponencial da expressão $(1 + \dfrac{1}{n})^n$ quando n tende ao infinito. Agora, será demonstrado como se pode calcular esse limite, então considere a sequencia a_n que tem como termo geral:

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

Basta mostrar que a_n, é monótona, e limitada, assim o teorema 2.1.1 nos garante que a sequência converge para um limite a. Primeiro, note que $a_n > 2$ para todo $n > 2$. Dado que

todos os termos de a_n são positivos e, a partir do terceiro termo, é possível ver que:

$$\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} > 0$$

Logo $a_n > 2$, pois a soma dos dois primeiros termos $1 + \frac{1}{1!} = 2$

Agora, observe que como todos os termos da sequência são positivos e a cada termo somado a sequência aumenta, podemos dizer que ela é monótona, assim $a_n < a_{n+1}$, logo, crescente.

Como $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n > 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^{n-1}$,

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \ldots < 1 + 2 = 3.$$

Observe que a partir do segundo termo da soma $1 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots$, temos uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$, onde a soma dos termos é:

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Dai $a_n < 3$, logo limitada , ou seja, seus valores nunca ultrapassam 3. Com isso o teorema nos garante que a sequência a_n converge para um limite a quando $n \to \infty$.

Agora, vamos considerar a sequência $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, sera mostrado que essa sequência ela também converge e melhor para o mesmo limite de a_n.

Para tal demonstração, podemos verificá-la utilizando a fórmula binomial de Newton que é utilizada no ensino básico, onde iremos expandir a expressão $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

$$\begin{aligned}
b_n &= \binom{n}{0} 1^n \left(\frac{1}{n}\right)^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} \left(\frac{1}{n}\right)^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots + \binom{n}{n} 1^0 \left(\frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \\
&\quad + \ldots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-2}{n}\right) \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Observe que na terceira igualdade cada termo do parentes é menor que 1, daí, temos que $b_n \leq a_n$, o que faz com que b_n também seja limitada superiormente por 3.

Além disso, note que b_n é estritamente crescente pois $b_{n+1} > b_n$. Certamente pois,

$$\begin{aligned}
b_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \\
+ \ldots + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \ldots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Perceba que a última parcela de $b_{n+1}\left[\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\right]$ é maior que zero pois todos seus termos são positivos assim:

$$b_{n+1} > 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)$$
$$+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right).$$

Mas como, $n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow 1-\frac{k}{n} < 1-\frac{k}{n+1}, \forall\, k > 0$.

Considere $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$, assim:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &> 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) \\ &+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) \\ &> 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) = b_n \end{aligned}$$

Então $b_{n+1} > b_n$, por tanto b_n é crescente e limitada, logob_n é convergente, assim deve existir $b \in \mathbb{R}$, com $2 \leq b \leq 3$, tal que b_n se aproxima de b a medida que n aumenta

Agora, precisamos mostrar que $a = b$. Para tal iremos mostrar que $a \geq b$ e $a \leq b$.

Para a primeira desigualdade é notório que $a \geq b$ pois já mostramos que $a_n \geq b_n$ para todo n. Então,

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

.

Vamos mostrar agora que $a \leq b$, para tal seja $m < n$ um inteiro fixo assim vamos escrever os $m+1$ primeiros termos de b_n:

$$1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-2}{n}\right)\left(1-\frac{m-1}{n}\right)$$

Como $m < n$ e todos os termos são positivos esta última parcela é menor do que a ultima parcela de b_n logo:

$$b_n > 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{-2}{n}\right)\left(1-\frac{m-1}{n}\right).$$

Agora, da desigualdade acima como m é fixo vamos fazer com que $n \to \infty$, assim a soma tende para um a_m pois os valores $1-\frac{1}{n}, 1-\frac{2}{n}, \ldots, 1-\frac{m-1}{n}$ se aproximas de 1, ou seja, $\lim_{n\to\infty} b_n \geq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{m!} = a_m$, para qualquer que seja o m, assim $b \geq a_m$. Mas já vimos que $a \geq b$. Logo pela desigualdade só podemos ter que $b = a = e$.

Finalmente agora podemos demostrar a irracionalidade do número e

3.3 IRRACIONALIDADE DO NÚMERO DE EULLER

Para demonstrar a irracionalidade do número (e), empregaremos o método da contradição que é o mesmo utilizado por Maor (2011) o qual consiste em supor, inicialmente, que (e) é um número racional. Ao investigarmos essa hipótese, logo nos deparamos com uma inconsistência, conduzindo-nos a uma conclusão contraditória.E assim vamos concluir a irracionalidade de e.

Supondo que e é racional, então $e = \dfrac{p}{q}$, com p e q primos entre si. Como vimos $2 < e < 3$, dessa forma e não pode ser um inteiro logo $q \geq 2$. Sabemos que:

$$\frac{p}{q} = e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

.

Multiplicando $q!$ em ambos os lados ficamos com:

$$\begin{aligned}
\frac{p \cdot q!}{q} &= q!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(q-1)!} + \frac{1}{q!} + \frac{1}{(q+1)!} + \ldots + \frac{1}{n!} \ldots\right) \\
\frac{p \cdot q(q-1)!}{q} &= q! + q! + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \ldots + \frac{q!}{(q-1)!} + \frac{q!}{q!} + \frac{q!}{(q+1)!} + \ldots + \frac{q!}{n!} \ldots \\
p(q-1)! &= [q! + q! + q(q-1) \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + q(q-1) \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 4 + \ldots + q + 1] \\
&\quad + \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots + \frac{1}{(q+1)(q+2) \cdot \ldots \cdot (q+n)} \\
&\quad + \ldots + \frac{q!}{n!} \ldots
\end{aligned}$$

.

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
&p(q-1)! - [q! + q! + q(q-1) \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + q(q-1) \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 4 + \ldots + q + 1] = \\
&\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots + \frac{1}{(q+1)(q+2) \cdot \ldots \cdot (q+n)} + \ldots + \frac{q!}{n!} \ldots
\end{aligned}$$

Observe que o primeiro membro da igualdade se trata de uma diferença de produtos de números inteiro, logo é um número inteiro, já o segundo membro da igualdade não podemos afirma pois se trata de frações, e ainda tem-se que $q \geq 2 \Rightarrow \dfrac{1}{q} \leq \dfrac{1}{2}$. Dai, $q + 1 \geq 3$.

Logo da igualdade anterior temos que:

$$\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} \ldots + \frac{1}{(q+1)(q+2) \cdot \ldots \cdot (q+n)} + \ldots + \frac{q!}{n!} \ldots \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots$$

Observar que $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^3} \ldots$.se trata de uma progressão geométrica de razão $\dfrac{1}{3}$ onde fazendo o uso da fórmula da somas de termos de uma P.G. infinita temos que

$$S = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

Portanto

$$p(q-1)! - [q! + q! + q(q-1)(q-2)\cdot\ldots\cdot 5\cdot 4\cdot 3 + q(q-1)(q-2)\cdot\ldots\cdot 5\cdot 4 + \ldots + q + 1] \leq \frac{1}{2}.$$

Com isso temos um absurdo pois não exite um número inteiro entre 0 e $\frac{1}{2}$. Tudo após supor que e é um número racional, assim concluímos que e é irracional.

4 O NÚMERO pi

Neste capítulo, nosso objetivo é apresentar e analisar a demonstração clássica de Ivan Niven (1915-1999) sobre a irracionalidade do número π. A demonstração de Niven oferece uma abordagem mais contemporânea para demostrar que π é irracional. Aqui sera mostrado de forma mais minuciosa os principais conceitos e técnicas matemáticas envolvidas. A demonstração consiste em supor que π^2 é racional, e mostrar que essa afirmação leva a uma contradição. Consequentemente π^2 é irracional, e, logo π é irracional.

4.1 MOTIVAÇÃO

O número π (notação que foi utilizada pelo matemático William Jones (1675 - 1749)) é uma constante matemática fundamental que representa a relação entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro. A sua história se remete a muitos anos atrás com civilizações antigas como os babilônicos e os antigos egípcios.

No velho testamento (I Reis 7:23) onde se retrata da edificação do palácio de Salomão neste versículo podemos ler: "Fez mais o mar de fundição, de dez côvados duma borda até a outra borda, redondo ao redor e cinco côvados de alto; e um cordão de trinta côvados o cingia em redor" pelo que está escrito pode se concluir que $2\pi r = 30$ e assim $2r = 10$, e daí segue que $\pi = 3$, e isso foi usado por muitos anos no oriente antigo, mas isso não é verdade.

Segundo o papiro Rhind a quadratura do círculo egípcia é dada por $\pi = \left(\frac{4}{3}\right)^4 = 3,1604...$, mas as primeiras tentativas cientificas para encontrar o valor de pi aparenta ter sido por Arquimedes e depois Cláudio Ptolomeu e daí ao logo da historia vários outros grandes matemáticos aperfeiçoaram mais ainda o valor de π.

Hoje sabemos que π é um número irracional com trilhões de casas decimais já provadas, mas a sua irracionalidade só foi provada no século XVIII por Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777) provou que π é irracional. Então surgiram várias demonstração a qual uma delas foi demostrada em 1947 pelo matemático canadense Ivan Niven (1915-1999).

4.2 IRRACIONALIDADE DE pi

Para construir essa demonstração será necessário as seguintes condições.

Lema 4.2.1: dado $n \in \mathbb{N}$, seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = \dfrac{x^n(1+x)^n}{n!}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então:

1. $0 < f(x) < \dfrac{1}{n!}$ para todo $x \in (0, 1)$.

2. Existem $c_n, c_{n+1}, c_{n+2}, \ldots, c_{2n} \in \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{n!}(c_n x^n + c_{n+1}x^{n+1} + \ldots + c_{2n}x^{2n})$ para todo $x \in \mathbb{Z}$.

3. Para todo $k \in \mathbb{N}$, temos $f^k(0), f^k(1) \in \mathbb{Z}$, onde f^k denota a k-ésima derivada de f.

Demostração 1:

Como $0 < x < 1$, então $0 < x^n < 1$ e $0 < (1-x)^n < 1$.

Logo

$$0 < x^n(1-x)^n < 1$$

Multiplicado a desigualdade por $\dfrac{1}{n!}$ temos que:

$$0 < \frac{x^n(1-x)^n}{n!} < \frac{1}{n!}$$

Por tato

$$0 < f(x) < \frac{1}{n!}.$$

Demostração 2:

Para a segunda demonstração será analisado o termo $(1-x)^n$ realizando a expansão desse termo temos que

$$(1-x)^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n$$

Agora multiplicado a expressão por x^n

$$x^n(1-x)^n = c_nx^n + c_{n+1}x^{n+1} + c_{n+2}x^{n+2} + \ldots + c_{2n}x^{2n}$$

Logo

$$f(x) = \frac{1}{n!}(c_nx^n + c_{n+1}x^{n+1} + \ldots + c_{2n}x^{2n})$$

Demostração 3:

A última parte deste lema será dividida em duas partes.

1º Parte: $f^k(0) = 0$ se $0 \leq k < n$ ou $k > 2n$

$$f(x) = \frac{1}{n!}(c_nx^n + c_{n+1}x^{n+1} + \ldots + c_{2n}x^{2n})$$

Logo é fácil perceber que $f(0) = 0$ pois todos os coeficientes de f são múltiplos de x

Por outro lado observe que:

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= \frac{1}{n!}(nc_nx^{n-1} + (n+1)c_{n+1}x^n(n+2)c_{n+2}x^{n+1} + \cdots + 2nC_{2n}x^{2n-1}) \\
f^{(2)}(x) &= \frac{1}{n!}(n(n-1)c_nx^{n-2} + (n+1)nc_{n+1}x^{n-1} + (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n \\
&\quad + \cdots + 2n(2n-1)C_{2n}x^{2n-2}) \\
&\vdots \\
f^{(k)}(x) &= \frac{1}{n!}(n!C_n + (n+1)!c_{n+1}x + \frac{(n+2)!}{2}c_{n+2}x^2 + \cdots + \frac{(2n)!}{n!}c_{2n}x^n)
\end{aligned}$$

Logo, pode-se concluir que $f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$, pois quando $k < n$ todos os termos dependem de x logo no ponto 0, $f^{(k)}(0) = 0$ e quando $k = n$, $f^{(k)}(0) = \dfrac{k!c_n}{n!}$

Se continuar com as derivações segue que:

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \frac{1}{(n!}((n+1)!c_{n+1} + (n+2)!c_{n+2}x + \cdots + \frac{(2n)!}{(n-1)!}c_{2n}x^{n-1}) \\
f^{(n+2)}(x) &= \frac{1}{(n!}((n+2)!c_{n+2} + (n+3)!c_{n+3}x + \cdots + \frac{(2n)!}{(n-2)!}c_{2n}x^{n-2}) \\
&\vdots \\
f^{2n}(x) &= \frac{1}{n!}(2n!c_{2n}).
\end{aligned}$$

Observe que a partir da derivada $k > 2n$ sempre tem uma função nula, logo conclui-se que:

$f^k(0) = 0$ quando $k < n$ ou $k > 2n$ e $f^k(0) \in \mathbb{Z}$ quando $n \leq k \leq 2n$.

Agora verifique que $f^k(1) \in \mathbb{Z}$. Nesse caso perceba que:

$f(1-x) = \dfrac{(1-x)^n(1-(1-x))^n}{n!} = \dfrac{x^n(1-x)^n}{n!} = f(x)$.

Vejamos que

$$f(x) = f(1-x) \Rightarrow f'(x) = -f'(1-x) \text{ e } f^2(x) = (-1)^2 f^2(1-x),$$

recorrentemente $f^k(x) = (-1)^k f^k(1-x)$ daí,

$$f^k(1) = (-1)^k f^k(1-1) = (-1)^k f^k(0) \in \mathbb{Z}$$

Lema 4.2.2: seja a um número $\in \mathbb{N}$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi a^n}{n!} = 0$.

Demontração: Considere a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\pi a^n}{n!}$ então temos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\pi a^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{\pi a^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\pi a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{\pi a^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{\pi a^n}{n!}} < 1$ logo temos que, pelo teste da razão, a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\pi a^n}{n!}$ é convergente e, em particular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi a^n}{n!} = 0$.

Teorema 4.2.1. π^2 é irracional.

Suponha que $\pi^2 = \dfrac{a}{b}$, onde a e $b \in \mathbb{Z}$, assim vamos definir $F(x)$, onde f é o polinômio de grau 2n do lema 2.1, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} F(x) =& b^n \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \pi^{2j} f^{2n-2j}(x) \\ =& b^n(\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} f^2(x) + \cdots + (-1)^{n-1} \pi^2 f^{2n-2}(x) + (-1)^n f^{2n}(x) \end{aligned}$$

Note que cada termo constates da F tem a seguinte forma

$$b^n(-1)^{n-j}\pi^{2j} = (-1)^{n-j} b^n (\pi^2)^j$$

Como $\pi^2 = \dfrac{a}{b}$ dai temos que $(-1)^{n-j} b^{n-j} a^j \in \mathbb{Z}$ para todo j entre 0 e n. Além disso como o lema 2.1 nos garante que $f^k(0)$ e $f^k(1) \in \mathbb{Z}$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$ conclui-se que $F(0)$ e $F(1)$ também são inteiros

Agora vamos considera a função G da seguinte forma:

$$G(x) = F^{(1)}(x) sen(\pi x) - \pi F(x) cos(\pi x)$$

Desta forma podemos estabelecer a seguinte condição:

$$G^1(x) = \pi^2 a^n f(x) sen(\pi x)$$

Demostração: aplicando a regra do produto em G temos o seguinte

$$\begin{aligned} G^{(1)}(x) &= F^{(2)}(x) sen(\pi x) + \pi F^{(1)}(x) cos(\pi x) - \pi F^{(1)}(x) cos(\pi x) + \pi^2 F(x) sen(\pi x) \\ &= F^{(2)}(x) sen(\pi x) + \pi^2 F(x) sen(\pi x) \\ &= sen(\pi x)[F^{(2)}(x) + \pi^2 F(x)] \end{aligned}$$

Note que

$$F^{(2)}(x) = b^n[\pi^{2n} f^{(2)}(x) - \pi^{(2n-2)} f^{(4)}(x) + \cdots + (-1)^{(n-1)} \pi^2 f^{(2n)}(x) + (-1)^n f^{(2n+2)}(x)$$

e

$$\pi^2 F(x) = b^n[\pi^{(2n+2)} f(x) - \pi^{2n} f^2(x) + \cdots + (-1)^{n-1} \pi^4 f^{2n-2}(x) + (-1)^n \pi^2 f^{2n}(x)$$

Observe que a soma de $F^{(2)}(x) + \pi^2 F(x)$ se trata de uma soma telescopia, ou seja, os temos se anulas sobrando apenas o termo inicial e o termo final uma vez que $f^{(2n+2)}(x)$ é nulo pelo Lema 2.1, temos que:

$$F^{(2)}(x) + \pi^2 F(x) = b^n(\pi^{(2n+2)} f(x) + (-1)^n f^{(2n+2)}(x))$$

. Logo:

$$\begin{aligned} G^{(1)}(x) &= sen(\pi x)[b^n(\pi^{(2n+2)}f(x) + (-1)^n f^{(2n+2)}(x))] \\ &= sen(\pi x)b^n\pi^{(2n+2)}f(x) \\ &= sen(\pi x)\pi^2 b^n \left(\frac{a}{b}\right)^n f(x) = \pi^2 a^n f(x) sen(\pi x). \end{aligned}$$

O Teorema 2.3 nos garante que:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \pi^2 a^n f(x) sen(\pi x)\, dx &= F^{(1)}(1)sen(\pi) - \pi F(1)cos(\pi) - [F^{(1)}(0)sen(0) - \pi F(0)cos(0)] \\ &= \pi F(1) + \pi F(0) = \pi[F(1) + F(0)]. \end{aligned}$$

Assim:

$$\pi^2 \int_0^1 a^n f(x) sen(\pi x)\, dx = \pi[F(1) + F(0)].$$

Logo,

$$\pi \int_0^1 a^n f(x) sen(\pi x)\, dx = [F(1) + F(0)] \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto $\pi \displaystyle\int_0^1 a^n f(x) sen(\pi x)\, dx$ é um número inteiro.

Entretanto vimos que $0 < f(x) < \dfrac{1}{n!}$ e além disso $0 < sen(\pi x) < 1$, com $x \in (0, 1)$. Destas afirmações segue que:

$$0 < f(x) sen(\pi x) < \frac{1}{n!}.$$

Da desigualdade a cima, multiplicando πa^n temos

$$0 < \pi a^n f(x) sen(\pi x) < \frac{\pi a^n}{n!}.$$

Agora integrando a desigualdade acima temos

$$0 < \pi \int_0^1 a^n f(x) sen(\pi x)\, dx < \frac{\pi a^n}{n!} \int_0^1 dx.$$

Mas,

$$\frac{\pi a^n}{n!} \int_0^1 dx. = \frac{\pi a^n}{n!} x \Big|_0^1 = \frac{\pi a^n}{n!}.$$

Logo,

$$0 < \pi \int_0^1 a^n f(x) sen(\pi x)\, dx < \frac{\pi a^n}{n!}.$$

Do Lema (4.2.2) podemos tomar n suficientemente grande tal que $\dfrac{\pi a^n}{n!} < 1$. Mas, $\pi \displaystyle\int_0^1 a^n f(x) sen(\pi x)\, dx$ se trata de um número inteiro e,

$$0 < \pi \int_0^1 a^n f(x) sen(\pi x)\, dx < \frac{\pi a^n}{n!} < 1.$$

Logo absurdo pois não existe número inteiro entre 0 e 1. Essa contradição aconteceu por supor que π^2 é racional. Portanto, π^2 é irracional e consequente π também é irracional.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi demonstrada a irracionalidade das constantes matemáticas π e e, amplamente utilizadas no ensino básico. A irracionalidade do número e pode ser abordada no ensino médio, pois é uma demonstração mais acessível. A irracionalidade de π, por sua vez, foi provada por meio da abordagem de Ivan Niven, que, apesar de bastante utilizada, apresenta uma complexidade maior em comparação com a demonstração do número e.

Esses resultados servem como base para o aprofundamento em propriedades adicionais dos números transcendentais e suas aplicações em diversas áreas da matemática e das ciências.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da matemática**. São Paulo: Blucher, 2019.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Números irracionais e transcendentes**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Conselho Nacional de Pesquisas, 1969.

IEZZI, Gelson; BORALLI, Carlos Murakamiand Marcelo de Carvalho; GIL, Plínio. **Fundamentos da matemática elementar, volume 5**. São Paulo: Atual, 2001.

LIMA, Elon Lages. **Análise real**. Rio de Janeiro: Impa, 2004. v. 2.

MAOR, Eli. **e:** the story of a number. Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 2011. v. 41.

NERI, Cássio. **Curso de análise real**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2019.

STEWART, James. **Cálculo, volume 1**. São Paulo: Cengage Learning, 2015.