

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CAMPUS DE ARAPIRACA
CURSO DE MATEMÁTICA LICENCIATURA

TEORIAS DE INTEGRAÇÃO

FERNANDO VIEIRA COSTA JÚNIOR

UFAL - ARAPIRACA
OUTUBRO DE 2015

Fernando Vieira Costa Júnior

Teorias de Integração

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao corpo docente do Curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Alagoas - UFAL, *Campus* de Arapiraca, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Ornan Filipe de Araújo Oliveira

UFAL - Arapiraca
Outubro de 2015

Universidade Federal de Alagoas - UFAL
Biblioteca *Campus* de Arapiraca - BCA
Divisão de Tratamento Técnico

S837t Costa Júnior, Fernando Vieira
Teorias de Integração / Fernando Vieira Costa Júnior. – Arapiraca, 2015.
127 f.

Orientador: Prof. Me. Ornan Filipe de Araújo Oliveira

Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas – UFAL (Campus de Arapiraca). Arapiraca, 2015.

Bibliografia: f.115-119.

Apêndices: f.120-123.

1. Integral de Lebesgue
2. Integral de Henstock-Kurzweil
3. Deficiências
4. Teorema da Convergência Dominada
5. Teorema de Riesz-Fischer
- I. Título

CDU 517.3

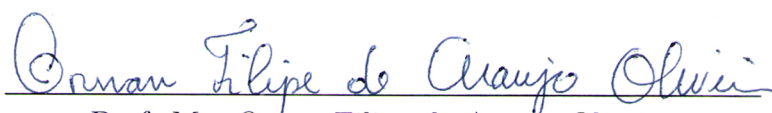
CDU 517.518.12

Fernando Vieira Costa Júnior

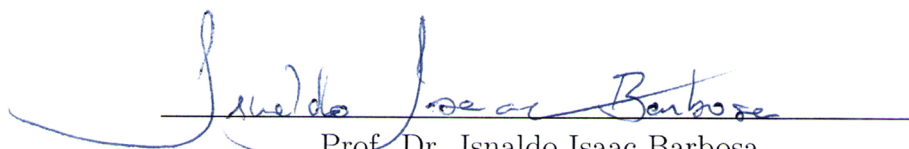
Teorias de Integração

Trabalho de conclusão de curso aprovado pelo corpo docente do Curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Alagoas - UFAL, *Campus* de Arapiraca, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

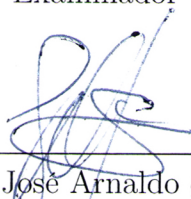
Banca Examinadora:



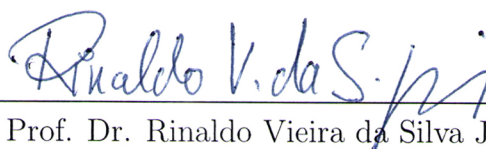
Prof. Me. Ornan Filipe de Araújo Oliveira
Departamento de Matemática - UFAL, Arapiraca
Orientador



Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa
Instituto de Matemática - UFAL, Maceió
Examinador



Prof. Me. José Arnaldo dos Santos
Departamento de Matemática - UFAL, Arapiraca
Examinador



Prof. Dr. Rinaldo Vieira da Silva Júnior
Departamento de Matemática - UFAL, Arapiraca
Examinador

Arapiraca, 17 de dezembro de 2015

À minha mãe.

Agradecimentos

Nem preciso dizer que corro o risco de ter esquecido o nome de alguém. Mas vamos lá! Agradeço aos meus amigos de turma, Viviane, Joyce, Alan, Ana Paula, Vanessa K., Priscilla, Kelvin, Rodolfo e Lucas, por todos estes anos juntos. Em especial, aos amigos Vanessa M., Rodrigo G., Rodrigo C., Jemerson e Illames, pelos encontros, converses, brincadeiras, e todos os momentos que passamos juntos.

Por tudo dito acima e adicionalmente pelos vários momentos de estudos juntos, agradeço aos amigos, Robério, Janielly, Sebastião, Djair e Lindinês, em especial a estes três últimos, que me forneceram muita amizade e conhecimento ao decorrer desta longa jornada acadêmica. Espero reencontrá-los sempre.

Aos membros do Stack Exchange (*TeX-LaTeX* e *Mathematics*), pelas várias ajudas com o $\text{\LaTeX}$ e com tópicos muitos específicos em Matemática.

Aos nossos professores Ornan, Moreno, Rinaldo, Elthon, William Piauí, Eben, Alcindo, Vanessa, José Arnaldo, José Barros e Fábio. Em especial ao Elthon, pela amizade e pelos trabalhos produzidos juntos, ao Moreno, pelos vários importantes conselhos e ajudas durante o curso, ao meu orientador Ornan, pelos vários cafés munidos de conhecimento que tomados juntos, ao professor Rinaldo, pela preocupação e por ser o cara bacana que ele é, ao prof. Eben, pelos auxílios em diversos momentos e por toda a álgebra que com ele aprendi, e ao prof. William Piauí, pelo empurrão inicial, o qual me tirou da inércia e me pôs num movimento constante em busca do conhecimento que sinto ainda hoje.

Aos amigos marxistas, Aline, Vicente, Neila, Tony e Paula, pelas viagens e pelas longas e ricas discussões que tivemos, de inestimável importância para minha formação pessoal. Saibam que externalizo estas ideias sempre que possível, na tentativa de fazer uma sociedade melhor.

Aos já egressos, dentre eles, Cássia, Luciano, Willames (Lilo), Josivaldo, Cristiano, Clemerson, Antonival e Emerson, pelas inúmeras conversas e trocas de conhecimento e pelos conselhos veteranos.

À banca examinadora, por aceitarem o convite para avaliar este trabalho, em especial ao prof. Isnaldo, por ter aceitado de bom grado, mesmo não sendo do campus Arapiraca. Peço desculpas pelo tamanho do texto, acima do convencional em Matemática. Espero que tenha sido divertido lê-lo.

Aos meus pais Josefa e Fernando, pelo carinho, preocupação e apoio, e a todos os demais familiares, em especial a meu Tio Milton pelas várias ajudas, pelo companheirismo e pelas aventuras juntos. Vem mais pela frente!

À minha companheira de vida Wiliane Maria do Nascimento, pelo amor, apoio, carinho e presença há mais de 5 anos. Te amo além da razão!

Durante todos estes anos construir fortes laços de amizade, ganhei irmãos que não tinha, irmãos para a vida toda. Poucos sabem o quão feliz me sinto por ter conhecido cada um de vocês. Expresso aqui com todo o carinho meu MUITO OBRIGADO!

*01000001 01101110 01100100 00100000 01001101
01100001 01101110 00100000 01100011 01110010
01100101 01100001 01110100 01100101 01100100
00100000 01000111 01101111 01100100 00100000
01101001 01101110 00100000 01101000 01101001
01110011 00100000 01101111 01110111 01101110
00100000 01101001 01101101 01100001 01100111
01100101 00101110*

- Unknown

Resumo

Este trabalho trata do desenvolvimento das Teorias de Integração, com detalhes matemáticos e históricos dos principais avanços no decorrer dos séculos. Objetiva-se exibir as principais deficiências das teorias anteriores, as quais motivam os surgimentos das próximas. Além disso, busca-se formas eficientes de tratar integrais abstratas, nas quais os estudantes frequentemente têm dificuldade ao iniciar, de modo a suavizar a transição entre as integrais do cálculo e teorias de integração mais gerais. Inicia-se com as primeiras formulações do conceito de integração realizadas por Newton e Leibniz. Em seguida, exibem-se as integrais de Cauchy, Riemann e Darboux, apresentando diversas deficiências atreladas a essas teorias. A integral de Lebesgue surge de modo a superar a maioria destas, mas ainda contém um Teorema Fundamental do Cálculo ineficiente. Este problema se estende desde as integrais anteriores, e até então nenhuma delas tinha o poder da integral de Newton no sentido de recuperar uma função a partir de sua derivada. A integral de Henstock-Kurzweil surge de modo a resolver esta última deficiência. Cita-se outras teorias de integrações, ainda mais gerais, e discute-se a respeito da utilização da integral de Henstock-Kurzweil e de McShane nos vários níveis de ensino acadêmico.

Palavras-chave: Integral de Lebesgue. Integral de Henstock-Kurzweil. Deficiências. Teorema da Convergência Dominada. Teorema de Riesz-Fischer.

Abstract

In this work we deal with an approach to the Integration Theories, with mathematical and historical details of the major advances over the centuries. We aim to show the main drawbacks of previous theories, from which the next ones appear to supplant. Besides, we aim seeking efficient ways to treat abstract integrals, in which the students frequently have difficulties starting, in order to smooth the transition between the calculus integrals and more general theories of integration. We begin with the first formulations of the integration concept from Newton and Leibniz. Then, we exhibit the integrals of Cauchy, Riemann and Darboux, presenting various deficiencies within these theories. The Lebesgue integral emerges to overcome the most of them, but it still presents an inefficient Fundamental Theorem of Calculus. This problem remains from the previous integrals and, until then, none of them had the power of Newton integral in the sense of recover a function from its derivative. The Henstock-Kurzweil integral comes to solve this last drawback. Finally, we mention other theories, even more general, and discuss about the utilization of the Henstock-Kurzweil and McShane integrals in several academic education levels.

Keywords: Lebesgue Integral. Henstock-Kurzweil Integral. Deficiencies. Dominated Convergence Theorem. Riesz-Fischer Theorem.

Lista de Figuras

2.1	Sir Isaac Newton (1642-1726) e Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716).	24
2.2	Augustin-Louis Cauchy (1789-1857).	26
2.3	Interpretação geométrica de uma soma de Cauchy.	27
2.4	Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) e Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866).	31
2.5	Jean-Gaston Darboux (1842-1917).	34
2.6	Interpretação geométrica das somas de Darboux inferior e superior de uma função não-negativa.	34
2.7	Thomas Joannes Stieltjes (1856-1894).	38
2.8	Representação geométrica das etapas da construção de K .	42
2.9	Relação algarismo-posição dos números com expansão na base 3.	43
2.10	Henry John Stephen Smith (1826-1883), Vito Volterra (1860-1940) e Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918).	44
2.11	Gráfico da função $\mathcal{T}$ de Thomae.	46
2.12	Gráfico da função de Volterra no intervalo $[a, b]$ tal que (a, b) foi removido.	55
2.13	Casos em que se obtém $y \notin E$ próximo de $x \in E$ tal que $ F'(y) = 1$.	55
2.14	Gráfico da n -ésima função da sequência (f_n) .	57
2.15	Gráfico da n -ésima função da sequência (g_n) e tracejado de seu limite.	57
3.1	Henri Léon Lebesgue (1875-1941) e Frigyes Riesz (1880-1956).	59
3.2	Gráfico de uma função degrau genérica.	62
3.3	Gráficos de f , $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$, respectivamente.	63
3.4	Gráficos de f , f^+ e f^- , respectivamente.	64
3.5	Interpretação geométrica da integral de uma função degrau.	65
3.6	Gráfico das quatro primeiras funções de (f_n) e de seu limite.	66
3.7	Beppo Levi (1875-1961).	82
3.8	Pierre Joseph Louis Fatou (1878-1929) e Ernst Sigismund Fischer (1875-1954).	91
4.1	Arnaud Denjoy (1884-1974) e Oskar Perron (1880-1975).	100
4.2	Ralph Henstock (1884-1974) e Jaroslav Kurzweil juntos; e Edward James McShane (1904-1989).	101
4.3	Uma soma de Cauchy aprimorada.	102
4.4	Diagrama das integrais de Riemann, Lebesgue e Henstock-Kurzweil.	106

Lista de Símbolos

$\overline{X}$	Fecho do conjunto X
$\mathcal{C} = (\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda \in L}$	Família de conjuntos com índices em L
$\mathcal{F}(X; \mathbb{R})$	Conjunto das funções reais $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$f_n \rightarrow f$	A sequência de funções f_n converge para f
$d(x, y)$	Distância entre x e y sob a métrica d
$d\text{-lim}$	Limite sob a métrica d , ou d -limite
$\mathcal{C}[a, b]$	Conjunto das funções contínuas no intervalo $[a, b]$
$\int_a^b$	Integral definida genérica
P	Partição genérica
$ P $	Norma da partição P
$S(P; f)$	Soma de Cauchy de f relativa a P e com pontilhamento livre
ξ_i	Pontilhamento genérico
Ξ	Conjunto de pontilhamentos
$P^* = (P, \Xi)$	Partição P pontilhada por Ξ
P^m	Partição P com o pontilhamento médio
$S(P^*; f)$	Soma de Cauchy de f relativa a P e com pontilhamento fixo
$\mathcal{R}[a, b]$	Classe das funções Riemann-integráveis
$\bar{S}(P; f)$ e $\underline{S}(P; f)$	Somas de Darboux superior e inferior, respectivamente
$\bar{\int}_a^b$ e $\underline{\int}_a^b$	Integrais de Darboux superior e inferior, respectivamente
$\text{amp}(I)$	Amplitude do intervalo I
$m(X) = 0$	O conjunto X tem medida nula
$\omega(f; X)$	Oscilação de f no conjunto X
$\overline{\lim}_{x \rightarrow c}$ e $\underline{\lim}_{x \rightarrow c}$	Limites superior e inferior de f no ponto c , respectivamente
$\omega(f; c)$	Oscilação de f no ponto c
$\mathcal{D}[a, b]$	Conjunto das funções tipo-Dirichlet
$\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$	Funções máximo e mínimo entre f e g , respectivamente
$f^+ e f^-$	Partes positiva e negativa de f , respectivamente
$q.s$	Propriedade válida quase sempre
$\varphi_n \uparrow f$ ou $\varphi_n \downarrow f$	A sequência (φ_n) converge monotonamente para f
$\overset{\circ}{\int}_a^b$	Integral de Riemann definida
$\bar{\int}_a^b f(x)dx$ e $\underline{\int}_a^b f(x)dx$	Integrais superior e inferior de Darboux
$L[a, b]$	Classe das funções Lebesgue-integráveis
$\ v\ $	Norma de um vetor v
$L^1[a, b]$ ou L^1	Espaço das funções Lebesgue-integráveis sob a norma- L^1
$\bar{f}$	Classe de equivalência da função f
$\bar{\mathcal{R}}[a, b]$	Integral de Riemann sobre classes de equivalência
$\oint_a^b$	Integral definida de Riemann generalizada
$\mathcal{R}^*[a, b]$	Classe das funções Henstock-Kurzweil-integráveis

Sumário

Introdução	12
1 Pré-requisitos	14
1.1 Sequências e séries de números reais	14
1.2 Topologia da reta	15
1.3 Limite de funções	17
1.4 Funções contínuas	19
1.5 Derivadas	20
1.6 Sequências e séries de funções	21
1.7 Espaços métricos	21
2 Integrais do Cálculo	24
2.1 A integral de Cauchy	25
2.2 A integral de Riemann	31
2.3 A integral de Riemann-Darboux	33
2.4 Conjuntos de medida nula	38
2.4.1 Conjunto de Cantor ternário	41
2.4.2 Conjunto de Cantor generalizado	44
2.5 Caracterização das funções Riemann-integráveis	45
2.6 Deficiências da integral de Riemann	50
2.6.1 Escassez de funções integráveis	50
2.6.2 Limitações operacionais	52
2.6.3 Ineficiência do Teorema Fundamental do Cálculo de Riemann	54
2.6.4 A classe $\mathcal{R}[a, b]$ não é o complemento de $\mathcal{C}[a, b]$	56
3 Integral de Lebesgue-Riesz	59
3.1 Integrando funções degrau	61
3.2 Lemas fundamentais	65
3.3 A classe $L^+[a, b]$	70
3.4 A integral de Lebesgue	75
3.4.1 Um pouco sobre funções e conjuntos mensuráveis	77
3.5 Teoremas de Beppo Levi e da Convergência Monótona	80
3.6 Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue	85
3.7 O espaço $L^1[a, b]$	89
3.7.1 Aprimorando a integral de Riemann por meio do conceito de funções equivalentes	92
3.7.2 A classe $L[a, b]$ é muito maior do que $\bar{\mathcal{R}}[a, b]$	93
3.8 Deficiências da integral de Lebesgue	94
3.8.1 Integrais impróprias	95

3.8.2	Produto de funções	97
3.8.3	O Teorema Fundamental do Cálculo de Lebesgue	98
4	Integral de Henstock-Kurzweil e outras	99
4.1	Retorno à integral de Riemann	101
4.1.1	A integral de Henstock-Kurzweil	103
4.1.2	O Teorema Fundamental do Cálculo	107
4.1.3	A integral de McShane e algumas observações pedagógicas	109
4.2	Uma olhada sobre outras integrais	113
	Conclusão	114
	Referências Bibliográficas	115
	Apêndices	
A	Limitantes	120
B	Equivalência de definições	122

Introdução

Atualmente, cientistas das mais diversas áreas se voltam para a integração por diversos motivos. Este conceito é amplamente utilizado e aplicado em contextos diversos. Utilizamos integração para realizar o cálculo de áreas de superfícies planas ou curvas, volumes de sólidos e comprimento de curvas, juntamente com medidas de atributos agregados como massa, momentos de inércia, carga dada a densidade de carga, magnetismo total dada uma densidade magnética, e assim por diante. Aplicamos integração para desenvolver as equações diferenciais integrais, as quais se aplicam aos mais diversos tipos de problema. Além disso, funcionais lineares contínuos e operadores lineares auto-adjuntos (hipermaximais) sobre espaços de funções são representados na teoria espectral e nas outras instâncias por integrais tipo-Stieltjes (HENSTOCK, 1988, p. vii).¹ Também aplica-se integração para distribuições em Estatística de modo a aproximar certas somas, como é o caso das somas binomiais que são aproximadas por integrais Gaussianas. Nestas aplicações e em muitas outras é imprescindível estimar as integrais, o que muitas vezes demanda uma teoria poderosa, isto é, uma integral com boas propriedades e que seja versátil no sentido de se aplicar a diversos contextos. Desta forma, é evidente que limitações numa ciência básica como Matemática acarreta em limitações nas ciências aplicadas, de modo que torna-se imprescindível desenvolver teorias de integração cada vez mais poderosas.

Por esse motivo, ao longo do tempo as teorias de integração evoluíram de modo a suplantarem deficiências das anteriores. Neste trabalho faremos um traçado histórico das principais teorias de integração, de suas limitações teóricas e de como isto foi suplantado pelas teorias posteriores. Um enfoque especial será dado à integral de Riemann, padrão nos cursos de graduação das ciências exatas. Com a evolução das ciências, esta integral tornou-se ineficiente em suprir as necessidades que as aplicações da teoria da integração demandavam, principalmente devido às suas limitações operacionais e à impossibilidade de aplicação em espaços abstratos. Neste ponto, um comentário prévio é oportuno. Por estarmos mostrando algumas sérias deficiências da integral de Riemann, é possível que fique a impressão de que estamos defendendo a ideia de que é necessário descartar esta integral o mais rápido possível, o que não é o caso. Num contexto mais geral em teoria da medida, é “quase”² isso que se faz. Um sacrifício necessário para que se possa alcançar os benefícios que uma teoria abstrata da integração é capaz de oferecer. No entanto, nosso objetivo aqui é usufruir o máximo possível da simplicidade disponível e oferecer de forma simples novas teorias de integração onde podem ser obtidas as melhores soluções para os problemas levantados sem ter que descartar as teorias anteriores. Todas as integrais que

¹Traçaremos alguns comentários sobre as integrais deste tipo no fim da Seção 2.3 no Capítulo 2 e no fim do Capítulo 3.

²Isso porque a teoria que se aprende em seguida (num Mestrado, por exemplo) geralmente é a integral de Lebesgue que, embora seja uma generalização da integral de Riemann, muitas vezes é introduzida sem qualquer conexão com esta integral, se utilizando de abordagens completamente diferentes daquelas utilizadas nos cursos de Cálculo ou de introdução à Análise.

veremos são generalizações da integral de Riemann, o que significa que todos os resultados já válidos para esta integral continuam válidos nas mesmas condições, e todas as funções integráveis ainda são integráveis nos novos conceitos, com valores das integrais idênticos. Das duas generalizações da integral de Riemann que detalharemos, uma delas (Capítulo 3) tem sua definição bastante diferente daquela que faz-se para as integrais estudadas em cursos de Cálculo ou Análise³, mas que mesmo assim guarda alguma semelhança, e não deixa de ser tão intuitiva quanto. A outra integral (Capítulo 4) retoma o método de Cauchy-Riemann⁴ de definir a integral, com algumas modificações sucintas. Além do mais, ambas as teorias se utilizam, em geral, de métodos do cálculo para computar as integrais. Dessa forma, nossa abordagem não busca inutilizar as integrais do cálculo, mas reaproveitar seus resultados, melhorar suas propriedades e eliminar seus aspectos falhos.

Neste trabalho, trataremos das deficiências da integral de Riemann detalhadamente e apresentaremos soluções para estas através de duas outras teorias: a integral de Lebesgue e a integral de Henstock-Kurzweil. Hoje, esta primeira é padrão em diversas áreas de aplicações, a qual está presente não só em cursos superiores de Matemática, mas de Física, Estatística, Probabilidade e outros. De fato, dada a sua generalidade, a integral de Lebesgue passou cada vez mais a ser imprescindível para o desenvolvimento de várias áreas científicas. Uma pergunta surge naturalmente: dada a importância destas ideias, como implementá-las em um nível de graduação? Como aumentar o apelo geométrico da teoria, de modo a torná-la mais palpável? O nível de abstração sempre foi um ponto criticado da teoria da integração de Lebesgue. Adiante, discutiremos soluções para estas questões baseadas em abordagens alternativas para o desenvolvimento desta integral. Novamente o desenvolvimento das ciências e da própria Matemática nos mostra que ainda existem aspectos deficientes na teoria da integração de Lebesgue. Um deles está relacionado a um dos resultados mais importantes sobre integração: o Teorema Fundamental do Cálculo. Detalharemos estes problemas e apresentaremos soluções para eles através da integral de Henstock-Kurzweil. Outras teorias de integração serão discutidas, tanto do ponto de vista teórico quanto do pedagógico. Neste último ponto de vista, buscaremos discutir a possibilidade de inserção de teorias da integração em curso de graduação e a modificação no tratamento da integral de Lebesgue nos cursos de pós-graduação.

Sobre o documento

São oportunas algumas observações sobre o texto. De modo a facilitar a leitura, utilizaremos duas marcações especiais. O símbolo $\blacklozenge$ encerra os exemplos, já o símbolo $\blacksquare$ marca o fim de uma demonstração. Além disso, elaboramos uma lista de símbolos e um índice remissivo bastante completos. O leitor poderá consultá-los ao confrontar alguma notação ou termo que não se lembra. Por fim, a título de informação, utilizamos o editor de imagens e documentos vetoriais Inkscape⁵ para a produção de todos os gráficos e representações geométricas do trabalho em formato vetorial. Todo o texto e fórmulas contidos nos gráficos foram convertidos do formato *.pdf* (gerado pelo PDFLaTeX) para *.svg* através do site Online-Convert⁶.

³Cf. Seções 2.1, 2.2 e 2.3 do Capítulo 2.

⁴Discutiremos este método nas Seções 2.1 e 2.2 adiante.

⁵Página oficial do software: <https://inkscape.org/pt/>. O Inkscape é um software gratuito (freeware) open-source.

⁶Página da ferramenta: <http://image.online-convert.com/convert-to-svg>.

1

Pré-requisitos

“Begin at the beginning,” the King said, gravely, “and go on till you come to an end; then stop.”

– Lewis Carroll, *Alice in Wonderland*

Este capítulo apresenta alguns conceitos básicos e estabelece algumas notações, necessários ao entendimento do trabalho. O leitor familiarizado com os tópicos aqui presentes pode optar por omiti-lo. Todo o conteúdo é posto de modo sucinto, com quase nenhum detalhamento. A maioria dos resultados apresentados serão utilizados durante todo o texto sem qualquer referência. Além disso, todas as demonstrações podem ser encontradas em quaisquer bons livros de Cálculo¹, Análise Real² ou Espaços Métricos³.

Consideraremos conhecidos, além do que exibiremos a seguir, as principais propriedades e resultados sobre conjuntos, funções, números naturais, números reais e espaços vetoriais. Conceitos como supremo, ínfimo, continuidade, etc., e suas propriedades serão utilizados corriqueiramente durante todo o texto, sem qualquer menção ao resultado utilizado. Algumas destas propriedades foram realocadas para o Apêndice A.

1.1 Sequências e séries de números reais

Também consideraremos conhecidos os conceitos de *sequências* e *séries* de números reais. Para sequências, utilizaremos as notações ou $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou (x_n) e, para subsequências, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$, onde $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ é infinito. O conjunto dos termos $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ de uma sequência (x_n) será denotado por $x(\mathbb{N})$. O *limite* de uma sequência *convergente*, quando existe, será denotado por

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{ou} \quad L = \lim x_n.$$

Vejamos alguns resultados que serão úteis para nós.

Teorema 1.1. *Sejam (x_n) e (y_n) sequências de números reais, $L_1 = \lim x_n$ e $L_2 = \lim y_n$. Se $L_1 < L_2$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < y_n$ para todo $n > n_0$. Caso análogo vale se $L_1 > L_2$.*

Corolário 1.1. *Sejam (x_n) e (y_n) sequências de números reais, $L_1 = \lim x_n$ e $L_2 = \lim y_n$. Se $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $L_1 \leq L_2$.*

¹Sugerimos os livros Guidorizzi (2012) e Spivak (1994)

²Alguns bons exemplares são Ávila (1999), Figueiredo (2013), Lima (2013a) e, em especial, Lima (2013b).

³Recomendamos fortemente Lima (2013c) e Rudin (1976).

Teorema 1.2. (*Teorema do Sanduíche para Sequências*) Sejam (x_n) , (y_n) e (z_n) sequências de números reais tais que $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\lim x_n = \lim z_n = L$, então $\lim y_n = L$.

Proposição 1.1. Sejam (x_n) e (y_n) sequências de números reais tais que $\lim x_n = 0$ e y_n é limitada. Então $\lim(x_n \cdot y_n) = 0$.

Teorema 1.3. Toda sequência monótona e limitada de números reais é convergente.

As operações básicas com limites finitos e infinitos de sequências (soma, produto, etc.) são conhecidas do cálculo diferencial. Consulte alguma das bibliografias indicadas no início deste capítulo.

Para séries, utilizaremos as notações $\sum a_n$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ ou $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Quando for conveniente, consideraremos séries iniciadas no índice 0, isto é, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Vejamos algumas propriedades:

Proposição 1.2. Se $\sum a_n$ converge então $\lim a_n = 0$, isto é, o termo geral de uma série convergente tende para 0.

Proposição 1.3. Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries convergentes, com somas L_1 e L_2 , respectivamente. Então

- (a) $\sum(a_n + b_n) = L_1 + L_2$;
- (b) $\sum(ra_n) = r \sum(a_n) = rL_1$.

Quando a série $\sum |a_n|$ converge, dizemos que $\sum a_n$ converge absolutamente. Vale o seguinte resultado:

Proposição 1.4. Toda série absolutamente convergente é convergente.

Encerramos esta seção com dois critérios de convergência que nos serão úteis.

Teorema 1.4. (*Critério de Comparação*) Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos não-negativos. Se existem $c > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $a_n \leq cb_n$ para todo $n > n_0$, então a convergência de $\sum b_n$ acarreta a convergência de $\sum a_n$, enquanto que a divergência de $\sum a_n$ acarreta a divergência de $\sum b_n$.

Teorema 1.5. (*Teste da Razão*) Seja (a_n) tal que $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se existem $c \in (0, 1)$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $|a_{n+1}/a_n| \leq c$ para todo $n > n_0$ (em particular quando $\lim |a_{n+1}/a_n| < 1$), então a série $\sum a_n$ converge absolutamente.

1.2 Topologia da reta

Seja $X \subset \mathbb{R}$. Um ponto $a \in X$ é dito *ponto interior* de X quando existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset X$. O conjunto formado pelos pontos interiores de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é denominado *interior* de X , e denotado por $\text{int}(X)$. Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é *aberto* quando $X = \text{int}(X)$. Cada conjunto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ é denominado *vizinhança* (ou ε -vizinhança) de a . Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é *fechado* quando seu complementar é aberto. Por fim, dizemos que um conjunto é *compacto* quando é fechado e limitado.

Proposição 1.5. São válidas as seguintes afirmações:

- (a) A interseção finita de abertos é aberta;
- (b) A união arbitrária de abertos é aberta;
- (c) A união finita de fechados é fechada;
- (d) A interseção arbitrária de fechados é fechada.

O fecho de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é o conjunto dos pontos $a \in \mathbb{R}$ tais que $a = \lim x_n$ para alguma sequência (x_n) de pontos em X . Simbolizaremos o fecho de um dado conjunto X pelo símbolo $\overline{X}$. A seguinte proposição permite caracterizar os conjuntos fechados por meio de seus fechos.

Proposição 1.6. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, $X = \overline{X}$.*

Um elemento $a \in \mathbb{R}$ é dito *ponto de acumulação* de X quando toda vizinhança de a contém pontos de X diferentes de a . Equivalentemente, a é ponto de acumulação de X se é limite de uma sequência (x_n) em X de termos dois a dois distintos. Durante este capítulo, o conjunto dos pontos de acumulação de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ será denotado por X' .

Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é um *ponto de acumulação à direita* do conjunto X quando, para todo $\varepsilon > 0$, o intervalo $[a, a + \varepsilon)$ contém pontos de X diferentes de a . Equivalentemente, a é ponto de acumulação à direita de X se $a = \lim x_n$, onde (x_n) é uma sequência em X cujos termos são maiores do que a . De maneira análoga definimos *ponto de acumulação à esquerda* de um dado conjunto X .

Um ponto $a \in \mathbb{R}$ que é tanto de acumulação à direita quando à esquerda de X é dito *ponto de acumulação bilateral* de X . Todo ponto de acumulação lateral ou bilateral é, em particular, ponto de acumulação.

Proposição 1.7. *Para todo conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tem-se $\overline{X} = X \cup X'$.*

Dados dois conjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}$, dizemos que X é *denso* em Y quando toda vizinhança de um ponto de Y contenha também algum ponto de X . A seguinte proposição fornece algumas caracterizações para do conceito de conjunto denso.

Proposição 1.8. *As seguintes asserções a respeito de dois conjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}$ são equivalentes:*

- (i) X é denso em Y ;
- (ii) Todo ponto de Y é limite de uma sequência de pontos de X ;
- (iii) $Y \subset \overline{X}$;
- (iv) Dado $a \in Y$, para qualquer $\varepsilon > 0$ tem-se $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$.

Exemplo 1.1. Mostra-se em qualquer bom livro de Análise que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é denso em qualquer intervalo da reta. Em particular, $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, isto é, $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}}$. O mesmo podemos dizer do conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dos números irracionais. ♦

Uma *cobertura* de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é uma família de conjuntos $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda \in L}$ tal que $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} \mathcal{C}_\lambda$. Uma *subcobertura* de $\mathcal{C}$ é uma subfamília $\mathcal{C}' = (\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda \in L'}$, com $L' \subset L$, tal que ainda se tem $X \subset \bigcup_{\lambda \in L'} \mathcal{C}_\lambda$. Observe que o conjunto de índices L é arbitrário. Quando L é finito dizemos que $\mathcal{C}$ é uma *cobertura finita*, quando L é enumerável dizemos que $\mathcal{C}$ é uma *cobertura enumerável* e quando $\mathcal{C}_\lambda$ é aberto para todo $\lambda \in L$ dizemos que $\mathcal{C}$ é uma *cobertura aberta*.

Teorema 1.6. (Teorema de Borel-Lebesgue) Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, toda cobertura aberta $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ de X admite uma subcobertura finita $A_{\lambda_1}, A_{\lambda_2}, \dots, A_{\lambda_n}$.

Teorema 1.7. (Princípio dos Intervalos Encaixados) Seja $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma família de compactos tais que $K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_n \supset \dots$. Então o conjunto

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$$

é não-vazio e compacto.

Do Teorema 1.7 decorre o seguinte corolário:

Corolário 1.2. Se a sequência decrescente de intervalos compactos $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \dots$ é tal que $\lim(b_n - a_n) = 0$, então existe $x \in [a_1, b_1]$ tal que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{x\}.$$

A hipótese da compacidade dos conjuntos da família $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no Teorema 1.7 é indispensável. É o que nos mostra o

Exemplo 1.2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere os conjuntos $A_n = [n, +\infty)$ e $B_n = (0, 1/n)$. Então as famílias $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são tais que $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ e $B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_n \supset \dots$. Porém $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$. Isto ocorre porque os membros da família $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não são fechados, enquanto que os da família $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não são limitados. ♦

1.3 Limite de funções

Sejam $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real e $a \in X'$. Dizemos que o número real L é *limite* de $f(x)$ quando x tende para a quando satisfaz a seguinte propriedade: para cada $\varepsilon > 0$ escolhido arbitrariamente, existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta_\varepsilon$. Quando existe, denotaremos este limite por

$$L = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Das propriedades do módulo, as expressões $0 < |x - a| < \delta_\varepsilon$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$ são equivalentes a $x \in (a - \delta_\varepsilon, a + \delta_\varepsilon) \cap (X \setminus \{a\})$ e $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, respectivamente.

Proposição 1.9. Sejam $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real e $a \in X'$. O limite de $f(x)$ quando x tende para a , se existe, é único.

Teorema 1.8. Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções reais, $a \in X'$, $L_1 = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $L_2 = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Se $L_1 < L_2$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in X$ com $0 < |x - a| < \delta$. Caso análogo vale se $L_1 > L_2$.

Corolário 1.3. Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções reais, $a \in X'$, $L_1 = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $L_2 = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X \setminus \{a\}$, então $L_1 \leq L_2$.

Teorema 1.9. (*Teorema do Sanduíche para Funções*) Sejam $f, g, h : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções reais e $a \in X'$. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ e $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in X \setminus \{a\}$, então $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$.

Observe que a hipótese $x \in X \setminus \{a\}$ contida nos enunciados do Teorema 1.9 e do Corolário 1.3 pode ser substituída por $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap (X \setminus \{a\})$ para um certo $\delta > 0$ fixo (neste caso, dizemos que x está *próximo* de a). Isto ocorre porque o limite de funções é um conceito *local*.

Uma forma muito eficiente de caracterizar os limites de funções é dado pelo próximo teorema.

Teorema 1.10. Sejam $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real e $a \in X'$. Tem-se $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ se, e somente se, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$ para toda sequência (x_n) em X de termos diferentes⁴ de a tal que $\lim x_n = a$.

Proposição 1.10. Sejam $a \in X'$ e $f, g : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e g é limitada para x próximo de a . Então $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = 0$.

As principais propriedades dos limites de funções (soma, produto, etc.) são conhecidas do cálculo diferencial. Para relembrar suas demonstrações, consulte alguma das bibliografias indicadas no início deste capítulo.

Sejam $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação à direita de X . Dizemos que o número L é o *limite à direita* de $f(x)$ quando x tende para a , e escrevemos

$$L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x),$$

quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ satisfaz $0 < x - a < \delta_\varepsilon$. O *limite à esquerda* define-se de modo análogo. Estes são os *limites laterais*.

Seja $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde X é ilimitado superiormente. Dizemos que o número real L é o *limite* de $f(x)$ quando x tende a $+\infty$ quando satisfaz a seguinte propriedade: dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $A > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x \in (A, +\infty) \cap X$. Quando existe, denotaremos este limite por

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

De modo análogo define-se o *limite* de $f(x)$ quando x tende a $-\infty$ quando X é ilimitado inferiormente. Estes são os *limites no infinito*.

Com as devidas modificações, todos os resultados de limites continuam válidos para limites laterais e no infinito. Vejamos, por fim, os *limites infinitos*.

Sejam $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Dizemos que $f(x)$ *diverge para* $+\infty$ quando x tende para a , e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty,$$

quando, para cada $A > 0$, existe $\delta_A > 0$ tal que $f(x) > A$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_A$. De modo análogo definimos os demais limites

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \quad \text{etc.}$$

⁴Na verdade, o resultado ainda vale se $a = x_n$ no máximo para uma quantidade finita de índices n .

Proposição 1.11. *Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com X ilimitado superiormente. São válidas as seguintes propriedades para limites infinitos:*

- (a) *Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ e $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$, então $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$;*
- (b) *Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ e g é limitada inferiormente, então $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = +\infty$;*
- (c) *Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ e existe $k > 0$ tal que $g(x) \leq k$ para todo $x \in X$, então $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty$;*
- (d) *Suponha que $f(x) > 0$ para todo $x \in X$. Então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{-1} = +\infty$.*

1.4 Funções contínuas

Dizemos que uma função $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é *contínua no ponto* $a \in X$ quando, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existir $\delta_\varepsilon > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ e $|x - a| < \delta_\varepsilon$. Uma função contínua em todos os pontos de seu domínio é dita *contínua*.

É importante ressaltar que, por definição, fala-se de continuidade **apenas** em pontos do domínio de f . Se $f(a)$ não está definido, não faz sentido indagar se f é contínua em a .

Observe que: (1) Continuidade é um conceito *local*, isto é, ocorre numa vizinhança de um ponto; (2) Uma função sempre é contínua em pontos de seu domínio que não são de acumulação; e (3) Quando $a \in X \cap X'$ (em particular quando X é um intervalo fechado não-degenerado), um função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em a se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

De modo análogo aos limites de funções, podemos caracterizar as funções contínuas de modo eficiente por meio de sequências de números reais.

Proposição 1.12. *Uma função $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in X$ se, e somente se, $\lim f(x_n) = f(a)$ seja qual for a sequência (x_n) em X tal que $\lim x_n = a$ (ou seja, $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$).*

As operações básicas com funções contínuas (soma, produto, etc.) são conhecidas do cálculo diferencial. Consulte alguma das bibliografias indicadas no início deste capítulo.

Proposição 1.13. *Sejam $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : Y \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(X) \subset Y$, f é contínua em $a \in X$ e g é contínua em $b = f(a) \in Y$. Então $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em a .*

Dizemos que uma função $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é *uniformemente contínua* quando, dado um $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ para quaisquer $x, y \in X$ com $|x - y| < \delta$.

Em particular, toda função uniformemente contínua é contínua. Porém, a afirmação inversa só é válida se X for compacto. É o que afirma o próximo teorema.

Teorema 1.11. *Seja $X \subset \mathbb{R}$ compacto. Toda função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua é uniformemente contínua.*

Encerraremos esta seção com dois teoremas que serão úteis nos próximos capítulos.

Teorema 1.12. *(Teorema de Weierstrass) Seja $X \subset \mathbb{R}$ compacto e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Então existem $x_1, x_2 \in X$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in X$. Em particular, f é limitada.*

Teorema 1.13. (*Teorema do Valor Intermediário*) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, com $a < b$. Se $f(a) < d < f(b)$, então $d = f(c)$ para algum $c \in (a, b)$.

1.5 Derivadas

Sejam $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. Se existe o limite

$$L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

dizemos que f é *derivável no ponto a* e escrevemos $L = f'(a)$. Quando existe, o número $f'(a)$ é dito *derivada* de f em a . Uma função que é derivável em todos os pontos de seu domínio é dita *derivável*.

Seja $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável. A função $f' : X \rightarrow \mathbb{R}$ que, a cada $x \in X$, associa a derivada $f'(x)$ de f em x é denominada *função derivada* de f , ou *derivada primeira* de f . Se f' for derivável, podemos considerar a sua derivada primeira de $(f')' = f''$, a qual denominaremos *derivada segunda* de f e diremos que f é *duas vezes derivável*. Prosseguindo assim podemos definir a *derivada n -ésima* de f . Uma função $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável cuja derivada primeira é contínua é denominada *função de classe C^1* . De modo análogo, uma função n vezes derivável e cuja derivada n -ésima é contínua é dita *função de classe C^n* . Por convenção, C^0 é a classe das funções contínuas.

Exemplos interessantes e demonstrações para os próximos resultados podem ser encontrados em qualquer bom livro de cálculo.

Teorema 1.14. Se $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável em $a \in X \cap X'$, então é contínua neste ponto.

As regras operacionais básicas das derivadas (regra da soma, do produto, etc.) são conhecidas do cálculo diferencial. Consulte alguma das bibliografias indicadas no início deste capítulo.

Proposição 1.14. (*Regra da cadeia*) Sejam $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : Y \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(X) \subset Y$, tais que f é derivável em $a \in X \cap \text{Ac}(X)$ e g é derivável em $b = f(a) \in Y \cap \text{Ac}(Y)$. Então $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável no ponto a e vale $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

Corolário 1.4. (*Derivada da inversa*) Seja $f : X \rightarrow Y$ uma bijeção entre os conjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}$. Suponha que f seja derivável em $a \in X \cap \text{Ac}(X)$ e f^{-1} seja contínua em $b = f(a)$. Então f^{-1} é derivável em b , com derivada $(f^{-1})'(a) = 1/f'(a)$, se, e somente se, $f'(a) \neq 0$.

Encerramos esta seção com o importante Teorema do Valor Médio e dois de seus corolários, os quais serão úteis nos capítulos subsequentes.

Teorema 1.15. (*Teorema do Valor Médio*) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) , então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Corolário 1.5. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a, b) . Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é constante.

Corolário 1.6. Se duas funções contínuas $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e deriváveis em (a, b) são tais que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$, então existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + c$, para todo $x \in [a, b]$.

1.6 Sequências e séries de funções

Dado $X \subset \mathbb{R}$, denotaremos pelo símbolo $\mathcal{F}(X; \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções reais $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Uma *sequência de funções* em $\mathcal{F}(X; \mathbb{R})$ é uma função que, a cada $n \in \mathbb{N}$, faz corresponder uma função $f_n \in \mathcal{F}(X; \mathbb{R})$. Denotaremos as sequências de funções por $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou (f_n) .

Seja (f_n) uma sequência de funções em $\mathcal{F}(X; \mathbb{R})$. Dizemos que (f_n) *converge simplesmente* (ou *ponto-a-ponto*) para a função $f : X \subset \mathbb{R}$ quando, para cada $x \in X$, a sequência de números reais $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $f(x)$. Em termos precisos, (f_n) converge simplesmente para a $f(x)$ se, e somente se, dados $\varepsilon > 0$ e $x \in X$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ sempre que $n > n_0$. No caso afirmativo, escrevemos $f = \lim f_n$. É comum expressar a convergência simples de (f_n) para uma função f escrevendo “ $f_n \rightarrow f$ simplesmente”.

Observe que n_0 , além de depender de ε , geralmente depende do ponto $x \in X$. Um tipo mais restritivo de convergência é a uniforme, onde exige-se explicitamente a independência de n_0 em relação ao ponto $x \in X$.

Seja (f_n) uma sequência de funções em $\mathcal{F}(X; \mathbb{R})$. Dizemos que (f_n) *converge uniformemente* para a função $f : X \subset \mathbb{R}$ quando, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $x \in X$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ sempre que $n > n_0$.

Séries de funções são definidas de modo análogo ao que fizemos para definir séries de números reais. Uma *série de funções* $\sum f_n$ é a sequência das somas parciais

$$f_1, f_1 + f_2, \dots, f_1 + f_2 + \dots + f_n, \dots,$$

onde $f_n \in \mathcal{F}(X; \mathbb{R})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sendo um caso particular de sequência, faz sentido falar sobre convergência simples e uniforme de séries de funções. Observe que, em cada ponto $x \in X$ fixado, a convergência simples é em particular a convergência de uma série de números reais. Portanto, continuam válidos todos os resultados já discutidos na Seção 1.1.

Como já dissemos, a convergência uniforme de uma sequência ou série de funções é uma condição muito restritiva. Como veremos adiante, estamos interessados em condições menos exigentes para que se possam realizar determinadas operações com integrais. De modo a simplificar os enunciados, sempre que tratarmos da convergência de sequências ou séries de funções estaremos nos referindo à convergência simples. Desta forma, as notações $f_n \rightarrow f$, $\lim f_n = f$, $\sum f_n \rightarrow f$ ou $\lim \sum f_n = f$ referem-se à este tipo de convergência. Deixaremos explícito quando estivermos falando sobre convergência uniforme. Nos próximos capítulos veremos detalhadamente vários exemplos de sequências de funções.

1.7 Espaços métricos

Nesta seção generalizaremos o conceito de sequência para conjuntos mais gerais. Esta generalização será importante para o estudo da completude de alguns espaços de funções que estudaremos nos próximos capítulos.

Seja M um conjunto. Um elemento $x \in M$ chama-se *ponto* de M . Uma *métrica* em M é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, cujo valor $d(x, y) \in \mathbb{R}$ assumido em um par $(x, y) \in M \times M$ é chamado *distância* entre os pontos x e y , e que satisfaz as seguintes quatro condições para quaisquer $x, y, z \in M$:

- (i) $d(x, x) = 0$;
- (ii) Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;
- (iii) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Denominamos *espaço métrico* o par (M, d) , onde M é um conjunto e d uma métrica em M . Quando não houver perigo de ambiguidade, nos referiremos a (M, d) como “o espaço métrico M ”, deixando subentendida a métrica d em questão. Também podemos falar “o espaço métrico M munido com a métrica d ” para nos referir a (M, d) e evidenciar a métrica d em M considerada.

A seguinte proposição é consequência da definição.

Proposição 1.15. *Seja M um espaço métrico munido com a métrica d . Então*

- (a) $d(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$;
- (b) $|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$.

Observe que não há restrição para o tipo do conjunto M na definição de espaço métrico. Pode ser um conjunto de números, pontos, vetores, matrizes, conjuntos, funções gerais, funções específicas, etc. Adiante estudaremos o espaço L^1 das funções Lebesgue-integráveis com a importante *métrica- L^1* .

Exemplo 1.3. Uma métrica d muito simples que pode fazer qualquer conjunto M tornar-se um espaço métrico é a chamada *métrica zero-um*. Definimos $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ pondo, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, $d(x, y) = 1$, se $x \neq y$, e $d(x, x) = 0$. ♦

Exemplo 1.4. Observe que o módulo de números reais $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $|x| = \max\{x, -x\}$, guarda grande similaridade com a definição de métrica. De fato, podemos naturalmente tornar $\mathbb{R}$ um espaço métrico introduzindo $d(x, y) = |x - y|$. A prova de que d é de fato uma métrica decorre imediatamente das propriedades do módulo. Denominaremos esta por *métrica canônica* (ou *métrica usual*) de $\mathbb{R}$. ♦

Seja M um espaço métrico munido com a métrica d . Uma *sequência* em M é uma função (x_n) que, a cada número natural n , faz corresponder um elemento $x_n \in M$. Dizemos que (x_n) *converge* para L quando, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, L) < \varepsilon$ sempre que $n > n_0$. Neste caso, L é dito *limite* da sequência (x_n) sob a métrica d (ou *d-limite*) e denotado por

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{ou} \quad L = \lim x_n.$$

Caso queiramos explicitar a métrica, escrevemos $d\text{-lim}$ no lugar de $\lim$. Dizemos que uma sequência (x_n) em M é *convergente* sob a métrica d quando seu d -limite L existe e $L \in M$.

Observe que retornamos à definição de sequência de números reais ao tomar $M = \mathbb{R}$ e d como sendo a métrica canônica de $\mathbb{R}$.

Proposição 1.16. *Uma sequência (x_n) num espaço métrico (M, d) tem, no máximo, um d -limite.*

Demonstração. Suponha que $L_1, L_2 \in M$ sejam dois limites de (x_n) sob d . Dado $\varepsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $d(x_n, L_1) < \varepsilon/2$ se $n > n_1$ e $d(x_n, L_2) < \varepsilon/2$ se $n > n_2$. Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Se $n > n_0$, então

$$0 \leq d(L_1, L_2) \leq d(x_n, L_1) + d(x_n, L_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, $d(L_1, L_2) = \lim d(L_1, L_2) = 0$, donde $L_1 = L_2$. ■

Seja (M, d) um espaço métrico e (x_n) uma sequência em M . Dizemos que (x_n) é uma *sequência de Cauchy em M* quando: dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ sempre que $m, n > n_0$.

É imediato que toda sequência convergente é de Cauchy. Porém, como nos mostra o próximo exemplo, a recíproca nem sempre é verdadeira.

Exemplo 1.5. Considere o conjunto $M = (0, 1)$ e seja d a métrica canônica de $\mathbb{R}$, isto é, $d(x, y) = |x - y|$. Então a sequência (x_n) dada por $x_n = 1/n$ é uma sequência de Cauchy que não é convergente. ◆

Se um espaço métrico (M, d) tem a propriedade de que toda sequência de Cauchy é convergente, dizemos que M é *completo*.

Exemplo 1.6. Mostra-se que o *espaço euclidiano n -dimensional* $\mathbb{R}^n$, dado por

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\},$$

é completo sob a métrica dada por

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2},$$

onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. A prova deste fato, embora acessível, é bastante longa. O leitor poderá encontrá-la em Lima (2013c, p. 185). Observe que a métrica canônica de $\mathbb{R}$ é a métrica d com $n = 1$. Assim, em particular, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é completo sob esta métrica. ◆

Sendo um espaço completo, toda sequência de Cauchy em $(\mathbb{R}, d)$ é convergente, onde d é a métrica canônica de $\mathbb{R}$. Assim, vale a seguinte asserção:

Teorema 1.16. *Uma sequência (x_n) tal que $x(\mathbb{N}) \subset \mathbb{R}$ é convergente se, e somente se, é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$.*

Adiante definiremos a importante métrica- L^1 e examinaremos a completude do conjunto $\mathcal{C}[a, b]$ de todas as funções contínuas em $[a, b]$, bem como de alguns outros espaços de funções, sob esta métrica.

2

Integrais do Cálculo

Uma longa viagem começa com um único passo.
– Lao-Tsé

As principais ideias do cálculo integral moderno têm suas raízes na Grécia antiga, com a busca incessante por métodos que pudessem fornecer uma boa aproximação para a área de figuras delimitadas por curvas complicadas. Destaca-se o Método de Exaustão, introduzido por Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.) e aperfeiçoado e amplamente utilizado por Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) para o cálculo do comprimento de curvas, áreas e volumes de figuras geométricas. Este método consistia em preencher a área a ser calculada com figuras cujas áreas fossem mais simples de serem calculadas. Aumentando a quantidade de figuras, preenchia-se melhor a área e gerava-se uma aproximação cada vez melhor. Foi *exaurindo* um disco que Arquimedes realizou o *cálculo clássico do π* , atingindo uma boa aproximação deste número.

Figura 2.1: Sir Isaac Newton (1642-1726) e Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716).



Fonte: Domínio Público.¹

Arquimedes não chegou a elaborar um método preciso para o cálculo de áreas, mas o Método de Exaustão podia fornecer uma aproximação tão boa quanto se desejasse. Brotam deste método as primeiras ideias de infinitésimo, que culminaram, mais de um

¹Imagens ordenadamente disponíveis em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:GodfreyKneller-IsaacNewton-1689.jpg> e https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gottfried_Wilhelm_von_Leibniz.jpg. Acesso em: 19 Out. 2015.

milênio depois, no desenvolvimento do cálculo diferencial e integral de Sir Isaac Newton (1642-1726) e Gottfried Leibniz (1646-1716) no Século XVII. Nesta época, a integral foi definida da seguinte forma: se $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *primitiva* de f , isto é, tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então F' é dita *integrável* e a diferença $F(b) - F(a)$ é denominada *integral definida* de f em $[a, b]$, a qual é denotada (na notação de Leibniz) por

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx. \quad (2.1)$$

Observe que (2.1) é parte do enunciado do importante Teorema Fundamental do Cálculo - TFC² que conhecemos hoje. Nos referiremos à integral definida acima por *integral de Newton*. A importância da expressão (2.1) reside no fato de que esta fórmula, também chamada *Fórmula de Newton-Leibniz*, fornece um meio prático para se calcular a integral de uma função em um intervalo através de sua primitiva.

Contudo, as ideias no cálculo diferencial e integral de Newton e Leibniz ainda tinham muito a evoluir. Os conceitos de derivada e integral eram imprecisos, baseado em intuições físicas ou geométricas. Até então, o processo de derivação e integração eram encarados como simples operações algébricas, uma inversa da outra³ (daí o nome *antiderivação*). Passaram-se décadas sem que uma definição de derivada, integral ou até mesmo de função fosse formulada rigorosamente. Houve um importante período de transição para o amadurecimento de ideias. Os fundamentos da Análise estavam sendo duramente criticados por filósofos da época, sobretudo por George Berkeley (1685-1753) em seu *O Analista* de 1734. Neste período, grandes expoentes como Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Jean d'Alembert (1717-1783), Leonhard Euler (1707-1783), Daniel Bernoulli (1700-1782), Joseph Fourier (1768-1830), dentre outros, iniciaram um programa de rigorização da Análise, mas foi o matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) o principal realizador desta tarefa.⁴

2.1 A integral de Cauchy

Em seus textos *Cours d'Analyse de l'École Royal Polytechnique* (1821) e *Résumé des Leçons Données à l'École Royal Polytechnique sur le Calcul Infinitésimal* (1823), Cauchy lançou as bases da Matemática moderna, fornecendo definições precisas para os conceitos de função, limite, continuidade e derivada, além de ter introduzido um novo conceito de integral aplicável a funções contínuas, denominada a partir de então como a *Integral de Cauchy*. Passaremos a construir a integral da mesma forma que Cauchy em seu *Résumé des Leçons* de 1823. Mas antes, precisamos definir alguns conceitos básicos.

Uma *partição* do intervalo fechado $[a, b]$ é um conjunto finito e ordenado

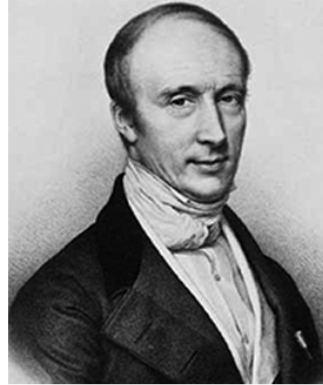
$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}.$$

²A história deste teorema se inicia com os trabalhos publicados por Leibniz (*Acta eruditorum his Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*) em 1684 e por Newton (*Methodus fluxionum et serierum infinitarum and the De quadratura curvarum*) em 1687.

³Na época, Newton fez uma relação direta entre uma função derivada e sua primitiva. Por ser considerado o inverso da derivação, o processo de integração era encarado como uma operação que “recupera” uma função a partir de sua derivada. Veremos no Capítulo 4 que apenas recentemente este primeiro conceito de integral foi generalizado de modo a ser válido (2.1) sempre que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

⁴Cf. Grabiner (2005, passim).

Figura 2.2: Augustin-Louis Cauchy (1789-1857).



Fonte: Domínio Público.⁵

A *norma* de P é o número

$$|P| = \sup\{(x_i - x_{i-1}) \in \mathbb{R}; \text{ com } i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Um *refinamento* de P é uma partição P' de $[a, b]$ tal que $P' \supset P$. Neste caso, dizemos que P' *refina* P . Note que $|P'| \leq |P|$.

Dadas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e uma partição P de $[a, b]$, a *soma de Cauchy* de f relativa a P é definida pela expressão

$$S(P; f) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \quad (2.2)$$

onde, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, ξ_i é um ponto arbitrário de $[x_{i-1}, x_i]$ (veja a Figura 2.3).

É comum intitular a escolha do conjunto $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ como o *pontilhamento* da partição P e referir-se ao par $P^* = (P, \Xi)$ como uma *partição pontilhada*. É claro que existem infinitas formas de pontilhar uma partição. Quando escrevemos a expressão (2.2), estamos considerando um pontilhamento arbitrário. Desta forma, $S(P; f)$ é um valor que depende do pontilhamento considerado. Às vezes, precisamos fazer com que $S(P; f)$ seja um número real. Nestas situações, um pontilhamento comum de se considerar é o denominado *pontilhamento médio*, no qual cada um de seus elementos é o ponto médio do intervalo ao qual pertence. Ao considerar o pontilhamento médio, denotaremos a partição pontilhada por P^m .

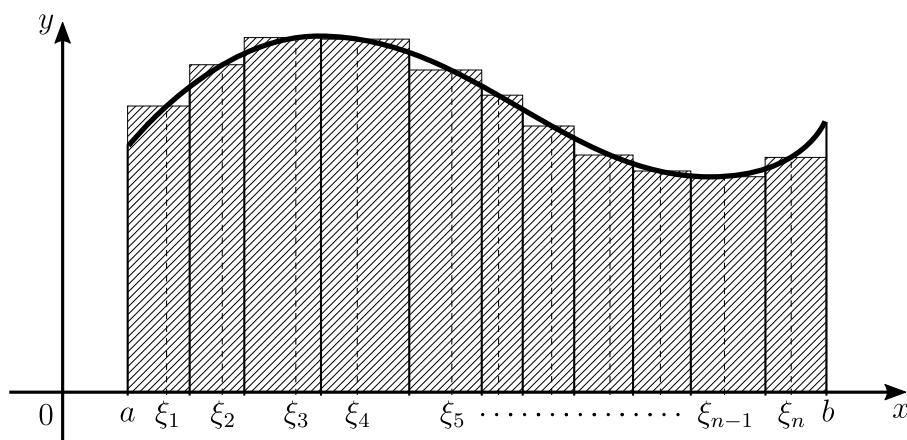
Podemos fixar uma partição pontilhada escrevendo $S(P^*; f)$. O ganho com este acréscimo na notação é a possibilidade de diferenciar somas de Cauchy com pontilhamentos diferentes, como por exemplo $S(P^*; f)$, $S(P^\#; f)$, $S(P^{**}; f)$, etc.

Definimos a *integral* em $[a, b]$ de uma função **contínua** $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo o número L ao qual as somas de Cauchy dadas em (2.2) se aproximam quando tomamos partições com norma arbitrariamente pequenas. Dada a semelhança que este processo tem com os limites que vimos no capítulo anterior, vamos denotá-lo por

$$L = \lim_{|P| \rightarrow 0} S(P; f). \quad (2.3)$$

⁵Disponível em: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/BigPictures/Cauchy.jpeg>. Acesso em: 19 Out. 2015.

Figura 2.3: Interpretação geométrica de uma soma de Cauchy.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Porém, salientamos que a expressão (2.3), embora semelhante, não tem o mesmo sentido dos limites de funções que consideramos até agora, visto que $S(P; f)$ não é uma função de P .⁶ Não obstante, alguns resultados continuam válidos para limites como este. Por exemplo, $L = \lim_{|P| \rightarrow 0} S(P; f)$ se e somente se $L = \lim S(P_n; f)$ para toda sequência (P_n) de partições tais que $\lim |P_n| = 0$.

Rigorosamente, a expressão (2.3) significa que, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar um $\delta_\varepsilon > 0$ tal que, para qualquer partição pontilhada P^* satisfazendo $|P| < \delta_\varepsilon$, tem-se $|S(P^*; f) - L| < \varepsilon$.

Um modo equivalente de definir a expressão (2.3) é da seguinte forma: dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar uma partição P_ε tal que, seja qual for a partição pontilhada P^* , temos

$$P \supset P_\varepsilon \Rightarrow |S(P^*; f) - L| < \varepsilon. \quad (2.4)$$

Uma demonstração para este fato é dada no Apêndice B.

Se o limite (2.3) existe, então é único. A verificação é imediata. Este limite único é denominado a *integral definida* de f em $[a, b]$, e será denotado por

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{ou} \quad \int_a^b f.$$

Em caso afirmativo, dizemos que f é *integrável* em $[a, b]$, ou simplesmente que f é integrável, no caso em que o intervalo esteja evidente. A integral que acabamos de definir denomina-se *integral de Cauchy*. Além disso, convencionaremos que

$$\int_a^b f = - \int_b^a f,$$

para não termos problemas quando precisarmos integrar com uma ordem não usual dos extremos de integração.

São imediatas as seguintes propriedades, cujas demonstrações, presentes em qualquer livro clássico de Análise, deixamos a cargo do leitor:

⁶De fato, pontilhando P de maneiras diferentes, a expressão $S(P; f)$ pode assumir infinitos valores. Logo, não define função.

Proposição 2.1. *Dadas $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integráveis e $r \in \mathbb{R}$, temos:*

- (a) *Se $c \in (a, b)$, então $f|_{[a, c]}$ e $f|_{[c, b]}$ são integráveis e $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$;*
- (b) $\int_a^b [f + g] = \int_a^b f + \int_a^b g$;
- (c) $\int_a^b r f = r \int_a^b f$;
- (d) *Se $f \geq 0$, então $\int_a^b f \geq 0$;*
- (e) $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$;
- (f) *Se $f \leq g$, então $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.*

É importante observar que na definição da soma de Cauchy, destacamos a palavra “contínua”. Ocorre que Cauchy originalmente definiu sua integral desta forma (CHAE, 1995, p. 24), e foi com essa definição que demonstrou alguns dos principais resultados que utilizamos até hoje. Vejamos alguns deles.

Teorema 2.1. *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então é integrável.*

Para demonstrar este teorema, utilizaremos o critério dado pelo

Lema 2.1. *(Critério de Cauchy) Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe uma partição P_ε de $[a, b]$ tal que, para quaisquer partições P, Q de $[a, b]$,*

$$P, Q \supset P_\varepsilon \Rightarrow |S(P; f) - S(Q; f)| < \varepsilon, \quad (2.5)$$

independentemente do pontilhamento.

Demonstração. Em virtude de (2.4), a primeira parte é trivial. Suponhamos então que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz (2.5). Observe que não dispomos (ainda) de qualquer critério de integrabilidade, apenas da definição. Assim, não nos resta alternativa: temos que obter o valor desta integral. A ideia é construir uma sequência convergente de somas de Cauchy, o que faremos indutivamente.

Inicialmente, seja $P_0 = [a, b]$ e tomemos $\varepsilon_1 = 1$. Pela hipótese, existe uma partição P_{ε_1} de $[a, b]$ tal que, para quaisquer partições pontilhadas P^*, Q^* , temos

$$P, Q \supset P_{\varepsilon_1} \Rightarrow |S(P^*; f) - S(Q^*; f)| < \varepsilon_1 = 1.$$

Fazendo $P_1 = P_{\varepsilon_1} \cup P_0$, é imediato que $P_1 \supset P_{\varepsilon_1}$ e $P_1 \supset P_0$. Em particular, quaisquer partições P, Q de $[a, b]$ contendo P_1 também contém P_{ε_1} e, portanto, satisfazem (2.5) para $\varepsilon = \varepsilon_1 = 1$. O primeiro termo da sequência será $a_1 = S(P_1^m; f)$, onde P_1^m denota a partição P_1 com o pontilhamento médio.

Suponhamos que esteja definido $a_{n-1} = (P_{n-1}^m; f)$ tal que $P_{n-1} \supset P_{n-2}$ e, para quaisquer partições P, Q de $[a, b]$, vale

$$P, Q \supset P_{n-1} \Rightarrow |S(P; f) - S(Q; f)| < \varepsilon_{n-1} = \frac{1}{n-1}.$$

Tomando $\varepsilon_n = 1/n$, obtemos uma partição P_{ε_n} tal que, sejam quais forem as partições P, Q de $[a, b]$, temos

$$P, Q \supset P_{\varepsilon_n} \Rightarrow |S(P; f) - S(Q; f)| < \varepsilon_n = \frac{1}{n}. \quad (2.6)$$

Fazendo $P_n = P_{\varepsilon_n} \cup P_{n-1}$, seja $a_n = (P_n \mathbf{m}; f)$. Então $P_n \supset P_{n-1}$ e quaisquer partições P, Q de $[a, b]$ que contenham P_n também conterão P_{ε_n} e, portanto, satisfarão (2.6). Isto completa a definição da sequência (a_n) .

Afirmamos que (a_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < \varepsilon$ e, usando a definição de (a_n) , para todas as partições pontilhadas P^*, Q^* de $[a, b]$, temos

$$P, Q \supset P_{n_0} \Rightarrow |S(P^*; f) - S(Q^*; f)| < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Se $m, n \in \mathbb{N}$ são tais que $m, n > n_0$, então $P_n, Q_n \supset P_{n_0}$. Logo,

$$|a_n - a_m| = |S(P_n^{\mathbf{m}}; f) - S(P_m^{\mathbf{m}}; f)| < \varepsilon,$$

como queríamos.

Sendo de Cauchy em $\mathbb{R}$, (a_n) é uma sequência convergente. Não é difícil mostrar que f é integrável, com $\int_a^b f = \lim a_n$. ■

Demonstração do Teorema 2.1. Como $[a, b]$ é compacto, f é uniformemente contínua. Mostremos que f satisfaz o critério de Cauchy. Para isto, seja dado $\varepsilon > 0$. Da continuidade uniforme de f , existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que

$$x, y \in [a, b] \text{ e } |x - y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Tomemos uma partição P_ε de $[a, b]$ tal que $|P_\varepsilon| < \delta_\varepsilon$. Sejam $P, Q \supset P_\varepsilon$ partições arbitrárias de $[a, b]$, digamos,

$$P = \{a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\} \quad \text{e} \quad Q = \{a = y_1 < y_2 < \cdots < y_n = b\}.$$

Como todos os pontos de P_ε são pontos de P , somando e subtraindo os possíveis pontos de $P \setminus P_\varepsilon$, podemos escrever $S(P_\varepsilon; f)$ na forma

$$S(P_\varepsilon; f) = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i)(x_i - x_{i-1}),$$

com $\alpha_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, (os α_i podem se repetir). Assim,

$$|S(P; f) - S(P_\varepsilon; f)| = \left| \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) - f(\alpha_i)](x_i - x_{i-1}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.7)$$

De modo análogo obtemos

$$|S(P_\varepsilon; f) - S(Q; f)| = \left| \sum_{i=1}^n [f(\alpha_i) - f(\beta_i)](y_i - y_{i-1}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (2.8)$$

com $\beta_i \in [y_{i-1}, y_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Portanto, de (2.7) e (2.8),

$$|S(P; f) - S(Q; f)| \leq |S(P; f) - S(P_\varepsilon; f)| + |S(P_\varepsilon; f) - S(Q; f)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como os pontilhamentos de P e Q foram arbitrários, pelo Teorema 2.1, f é integrável. ■

Com sua definição matematicamente rigorosa, Cauchy forneceu uma visão mais ampla do que é *integração*, quando comparamos com a integral de Newton. Em seu *Résumé des Leçons* de 1823, buscou condições para que a expressão (2.1) fosse válida, e encontrou que F' ser contínua é suficiente. Formulou então o

Teorema 2.2. (*Teorema Fundamental do Cálculo de Cauchy*) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Então

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx.$$

Demonstração. Para cada $x \in [a, b]$, definamos $\varphi(x) = \int_a^x f'(t)dt$. Então, se h é tal que $x + h \in [a, b]$, temos

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f'(t)dt.$$

Como $\int_x^{x+h} f'(x)dt = hf'(x)$, pois $f'(x)$ é constante em relação à variável de integração t , segue-se que

$$\left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - f'(x) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f'(t) - f'(x)]dt \right| = \left| \frac{1}{h} \right| \left| \int_x^{x+h} [f'(t) - f'(x)]dt \right|.$$

Seja dado $\varepsilon > 0$ arbitrário. Da continuidade de f' em x , existe $\delta > 0$ tal que, para todo $t \in (x - \delta, x + \delta) \cap [a, b]$, temos $|f'(t) - f'(x)| < \varepsilon$. Tomando h tal que $0 < |h| < \delta$ e $x + h \in [a, b]$, temos $|f'(x+h) - f'(x)| < \varepsilon$. Daí, se $0 < h < \delta$ e $x + h \in [a, b]$, então

$$\left| \int_x^{x+h} [f'(t) - f'(x)]dt \right| \leq \int_x^{x+h} |f'(t) - f'(x)|dt \leq \int_x^{x+h} \varepsilon dt = h \cdot \varepsilon = |h| \cdot \varepsilon,$$

e se $-\delta < h < 0$ e $x + h \in [a, b]$, então

$$\begin{aligned} \left| \int_x^{x+h} [f'(t) - f'(x)]dt \right| &= \left| - \int_{x+h}^x [f'(t) - f'(x)]dt \right| = \left| \int_{x+h}^x [f'(t) - f'(x)]dt \right| \leq \\ &\leq \int_{x+h}^x |f'(t) - f'(x)|dt \leq \int_{x+h}^x \varepsilon dt = -h \cdot \varepsilon = |h| \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Em todo caso, se $0 < |h| < \delta$ e $x + h \in [a, b]$, então

$$\left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - f'(x) \right| = \left| \frac{1}{h} \right| \left| \int_x^{x+h} [f'(t) - f'(x)]dt \right| \leq \frac{|h| \cdot \varepsilon}{|h|} = \varepsilon.$$

Pela definição de derivada, $f'(x) = \varphi'(x)$. Como x foi escolhido arbitrariamente em $[a, b]$, segue-se que $f'(x) = \varphi'(x)$ para todo $x \in [a, b]$, donde $f(x) = \varphi(x) + C$, para alguma constante $C \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$f(b) - f(a) = \varphi(b) + C - [\varphi(a) + C] = \varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b f'(x)dx,$$

pois $\varphi(a) = 0$. Isto completa a demonstração. ■

Cauchy ainda aplicou sua definição de integral a uma classe mais geral de funções: as *seccionalmente contínuas*. São funções que possuem no máximo uma quantidade finita de descontinuidades. Ele mostrou que, se f é limitada em $[a, b]$, descontínua em $c \in (a, b)$ e existem os limites

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f \quad \text{e} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{c+\varepsilon}^b f,$$

então podemos definir a *integral definida* de f em $[a, b]$ por

$$\int_a^b f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{c+\varepsilon}^b f. \quad (2.9)$$

Expressão análoga vale para o caso em que c é um dos extremos do intervalo $[a, b]$. De forma semelhante define-se a integral de funções com uma quantidade finita de descontinuidades. Contudo, o argumento não se aplica quando essa quantidade é infinita. Veremos adiante⁷ que, na integral de Riemann, um argumento com este propósito existe e é bem diferente.

Também podemos definir a integral para intervalos ilimitados fazendo

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t f, \quad (2.10)$$

quando estes limites existem.

Os procedimentos acima caracterizam as denominadas *integrais impróprias* que, quando existem, são ditas *convergentes*. São integrais que se utilizam de técnicas de tomar o limite para integrar funções que *a priori* não cumprem as condições da definição. No caso da integral de Cauchy, as integrais (2.9) e (2.10) são impróprias pois, na primeira, a função f é descontínua em c e, na segunda, o intervalo de integração é ilimitado. Mudanças ocorrerão com novas definições de integral.

2.2 A integral de Riemann

Figura 2.4: Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) e Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866).



Fonte: Domínio Público.⁸

Anos mais tarde, o matemático alemão Bernhard Riemann (1826-1866) realizou estudos importantes em teoria da integração na busca de uma resposta para a pergunta “o

⁷Cf. Teorema 2.6.

⁸Imagens ordenadamente disponíveis em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Peter_Gustav_Lejeune_Dirichlet.jpg e https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Georg_Friedrich_Bernhard_Riemann.jpeg. Acesso em: 19 Out. 2015.

que significa dizer que uma função é integrável?”, levantada por Lejeune Dirichlet (1805-1859), seu antigo professor. Até então, a integral de Cauchy tinha sido definida de modo a integrar funções (seccionalmente) contínuas. A própria definição de Cauchy continha a exigência de continuidade da função a ser integrada. Riemann então substituiu continuidade por limitação e demonstrou diversos critérios de integrabilidade para uma dada função. Desta forma, expandiu a metodologia de integração de Cauchy e obteve importantes resultados, os quais só foram publicados por Richard Dedekind (1831-1916) no ano de 1867 (depois de sua morte) no artigo *Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe* (Do desenvolvimento de uma função em séries trigonométricas). Há indícios históricos de que Riemann já estava com seu trabalho pronto em 1852, o ano em que Dirichlet visitou Göttingen e eles se reaproximaram. Além dos critérios de integração, Riemann obteve uma versão do TFC na qual F' ser integrável era suficiente para garantir a validade da fórmula (2.1). Algo surpreendente para a época foi um de seus exemplos, onde exibía-se uma função integrável cujos pontos de continuidade era denso no intervalo de integração. A *integral de Riemann*, como ficou conhecida, é ensinada até os dias de hoje em cursos de Cálculo a nível de graduação. O apelo intuitivo é um dos grandes triunfos desta integral.

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função **limitada**. Se existe

$$L = \lim_{|P| \rightarrow 0} S(P; f),$$

onde $S(P; f)$ é a soma de Cauchy de f relativa à partição P de $[a, b]$, como em (2.2), então dizemos que f é *Riemann-integrável* (ou *integrável a Riemann*, ou *integrável no sentido de Riemann*) e escrevemos

$$L = \int_a^b f(x)dx \quad \text{ou} \quad L = \int_a^b f.$$

A expressão $\int_a^b f(x)dx$ (ou $\int_a^b f$) é denominada *integral definida* de f em $[a, b]$. Denotaremos o conjunto de todas as funções Riemann-integráveis em $[a, b]$ por $\mathcal{R}[a, b]$.

A única mudança que Riemann realizou na definição de Cauchy foi a remoção da exigência da continuidade da função a ser integrada. Com isso, a relação dada em (2.9) deixou de caracterizar uma integral imprópria. Isso não ocorre, porém, com (2.10), que ainda é uma *integral de Riemann imprópria*. Em seu trabalho, Riemann mostrou que (2.9) é satisfeita naturalmente, e definiu a integral imprópria de uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **ilimitada** numa vizinhança do ponto $c \in (a, b)$ pela expressão

$$\int_a^b f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{c+\varepsilon}^b f,$$

quando estes limites existem. Expressão análoga vale para o caso em que c é um dos extremos do intervalo $[a, b]$. Em resumo, a palavra “descontínua” deu lugar à palavra “ilimitada”.

Além disso, Riemann obteve uma versão menos restritiva do TFC, na qual não mais se exige a continuidade da derivada, mas sua integrabilidade. Daremos seu enunciado formal e uma demonstraremos na próxima seção, à luz de uma abordagem mais eficiente da integral (veja Teorema 2.5). Assim como o TFC, muitos outros resultados obtidos com a definição proposta por Riemann não serão discutidos aqui, ou por serem vistos num curso ordinário de Cálculo em uma variável ou por terem sido remodelados com maior

elegância na *integral de Riemann-Darboux* que veremos na seção seguinte. Um tratamento adequado deste conteúdo pode ser encontrado em Kurtz e Swartz (2004) ou Thomson (2012), e um maior detalhamento histórico pode ser lido em Hawkins (1938). O livro Richardson (2008) também trás uma boa quantidade de resultados sob um tratamento aos moldes de Riemann.

Encerraremos esta seção demonstrando uma característica de suma importância das funções Riemann-integráveis. É importante dar atenção ao argumento utilizado, o qual é possibilitado pela definição de Riemann.

Teorema 2.3. *Toda função Riemann-integrável é limitada.*

Demonstração. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ilimitada. Tomando $\varepsilon = 1$, seja dado $\delta > 0$ arbitrário. Supondo que f seja ilimitada superiormente, mostraremos que, para qualquer número real L , existe uma partição pontilhada P^* de $[a, b]$ tal que $|P| < \delta$ e

$$S(P^*; f) \geq L + 1. \quad (2.11)$$

De fato, considere uma partição qualquer $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ satisfazendo $|P| < \delta$. Vamos pontilhá-la de modo conveniente. Como f é ilimitada superiormente, existe um índice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que f é ilimitada em $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, isto é, existem pontos em I_k cujas imagens são arbitrariamente grandes. Fixando os pontilhamentos ξ_j em $[x_{j-1}, x_j]$ para $j \neq k$, seja $\xi_k \in I_k$ tal que

$$f(\xi_k) \geq \frac{L + 1 - \sum_{i \neq k} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

Segue-se daí a desigualdade (2.11). De modo análogo mostra-se que, se f é ilimitada inferiormente, podemos obter uma partição pontilhada P^* de $[a, b]$ satisfazendo $|P| < \delta$ e $S(P^*; f) \leq L - 1$. Em todo caso, existe uma partição pontilhada P^* de $[a, b]$ tal que $|P| < \delta$ e $|S(P^*; f) - L| \geq 1$, o que completa a demonstração. ■

2.3 A integral de Riemann-Darboux

Posteriormente à publicação do trabalho de Riemann, o matemático francês Jean-Gaston Darboux (1842-1917) percebeu, no desenvolvimento da integral de Riemann, a utilização de conceitos que, curiosamente, ainda não haviam sido estabelecidos. Em seu artigo *Mémoire sur la théorie des fonctions discontinues* de 1875, Darboux preencheu todas as lacunas deixadas por Riemann e propôs uma abordagem equivalente para a integral, completamente rigorosa e com alguns benefícios práticos. Quando desenvolvida por este ângulo, é comum utilizar a denominação *integral de Riemann-Darboux* ou simplesmente *integral de Darboux*.

Desenvolveremos a integral de Riemann pela abordagem de Darboux a partir de agora. Dado o benefício prático, este tratamento é padrão em cursos de Análise.

Dadas uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e uma partição P de $[a, b]$, digamos, com $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$, definimos a *soma superior* e a *soma inferior* de Darboux (Figura 2.6) de f pela respectivas expressões:

$$\bar{S}(P; f) = \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}) \quad \text{e} \quad \underline{S}(P; f) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}),$$

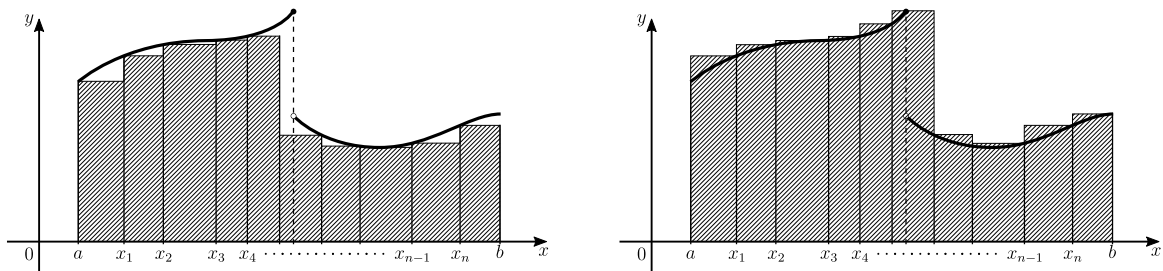
Figura 2.5: Jean-Gaston Darboux (1842-1917).

Fonte: Domínio Público.⁹

onde, para cada $i = 1, 2, \dots, n$,

$$M_i = \sup\{f(x) \in \mathbb{R}; x_{i-1} \leq x \leq x_i\} \quad \text{e} \quad m_i = \inf\{f(x) \in \mathbb{R}; x_{i-1} \leq x \leq x_i\}.$$

Figura 2.6: Interpretação geométrica das somas de Darboux inferior e superior de uma função não-negativa.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Decorre do conceito de supremo e ínfimo que, se P' refina P , então

$$\underline{S}(P; f) \leq \underline{S}(P'; f) \leq \bar{S}(P'; f) \leq \bar{S}(P; f). \quad (2.12)$$

Assim, o conjunto das somas de Darboux relativas a todas as partições de $[a, b]$ é um subconjunto limitado dos números reais (basta tomar as somas da partição $P_0 = \{a, b\}$ como limitantes). Definimos a *integral superior* e a *integral inferior* de Darboux da função f em $[a, b]$ respectivamente por

$$\int_a^b f(x) dx = \inf\{\bar{S}(P; f) \in \mathbb{R}; P \text{ é uma partição de } [a, b]\}$$

e

$$\int_a^b f(x) dx = \sup\{\underline{S}(P; f) \in \mathbb{R}; P \text{ é uma partição de } [a, b]\}.$$

⁹Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Darboux.jpg>. Acesso em: 19 Out. 2015.

De (2.12) concluímos que sempre existem as integrais superior e inferior de Darboux de uma função limitada. De modo a condensar a notação, escreveremos simplesmente

$$\int_a^b f(x)dx = \inf_P \bar{S}(P; f) = \int_a^b f \quad \text{e} \quad \int_a^b f(x)dx = \sup_P \underline{S}(P; f) = \int_a^b f.$$

Ora, dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada e fixando uma partição $P = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ de $[a, b]$, para quaisquer $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, temos

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}),$$

donde

$$\underline{S}(P; f) \leq S(P; f) \leq \bar{S}(P; f), \quad (2.13)$$

onde $S(P; f)$ é uma soma de Cauchy arbitrária. Assim, se f é integrável a Riemann, segue-se que

$$\int_a^b f \leq \int_a^b f \leq \int_a^b f. \quad (2.14)$$

Dizemos que uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é *integrável a Riemann-Darboux* quando suas integrais superior e inferior coincidem com um número L , denominado *integral de Riemann-Darboux* de f em $[a, b]$.

Em 1875, Darboux apresentou uma demonstração para o

Teorema 2.4. (*Teorema de Darboux*) *Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável a Riemann se, e somente se, é integrável a Riemann-Darboux. Além disso, as integrais coincidem.*

Demonstração. Como já observamos, (2.4) é uma maneira equivalente de entender o limite (2.3) que define a integral de Riemann.

Suponhamos que f seja Riemann-integrável. Então f é limitada e, portanto, existem $\int_a^b f$ e $\bar{\int}_a^b f$. Seja $\int_a^b f$ a integral definida de f em $[a, b]$. Mostremos que $\int_a^b f = \bar{\int}_a^b f$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ de $[a, b]$ tal que

$$-\frac{\varepsilon}{2} < S(P; f) - \int_a^b f < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (2.15)$$

seja qual for o pontilhamento considerado. Vamos tomar um pontilhamento conveniente. Em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, com $i = 1, 2, \dots, n$, escolhamos¹⁰ ξ_i tal que

$$M_i - f(\xi_i) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Fazendo $P^* = (P, \Xi)$, onde $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$, obtemos

$$\bar{S}(P; f) - S(P^*; f) = \sum_{i=1}^n [M_i - f(\xi_i)](x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.16)$$

¹⁰Tal escolha é possível pois $M_i - \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ já não é cota superior de $[x_{i-1}, x_i]$.

De (2.15) e (2.16), temos

$$\begin{aligned} \int_a^b f - \int_a^b f &\leq \bar{S}(P; f) - \int_a^b f \\ &= \bar{S}(P; f) - S(P^*; f) + S(P^*; f) - \int_a^b f \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como ε é arbitrário, concluímos que $\bar{\int}_a^b f = \int_a^b f$. Analogamente prova-se que $\underline{\int}_a^b f = \int_a^b f$. Logo, as integrais superior e inferior de f em $[a, b]$ coincidem com o número $L = \int_a^b f$, ou seja, f é Riemann-Darboux-integrável em $[a, b]$ e sua integral é igual à de Riemann neste intervalo.

Agora, admitamos por hipótese que f seja Riemann-Darboux-integrável em $[a, b]$, com integral $L = \bar{\int}_a^b f = \underline{\int}_a^b f$. Dado $\varepsilon > 0$, pela definição, existem partições P_1 e P_2 tais que

$$\bar{S}(P_1; f) < \varepsilon - L \quad \text{e} \quad L - \underline{S}(P_2; f) < \varepsilon.$$

Tomando $P_\varepsilon = P_1 \cup P_2$, as desigualdades em (2.12) nos dão

$$\bar{S}(P_\varepsilon; f) < \varepsilon - L \quad \text{e} \quad L - \underline{S}(P_\varepsilon; f) < \varepsilon. \quad (2.17)$$

Assim, para qualquer partição P de $[a, b]$ tal que $P \supset P_\varepsilon$, por (2.12), (2.13) e (2.17), temos

$$-\varepsilon < \underline{S}(P_\varepsilon; f) - L \leq \underline{S}(P; f) - L \leq S(P; f) - L \leq \bar{S}(P; f) - L \leq \bar{S}(P_\varepsilon; f) < \varepsilon,$$

donde

$$|S(P; f) - L| < \varepsilon,$$

seja qual for o pontilhamento considerado. Portanto, f é integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b f = L$, como queríamos. ■

O seguinte corolário consiste em um dos critérios de integrabilidade demonstrado por Riemann, o qual influenciou as definições de Darboux (HAWKINS, 1938, p. 17-18).

Corolário 2.1. *Uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável a Riemann em $[a, b]$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe uma partição P de $[a, b]$ tal que*

$$0 \leq \bar{S}(P; f) - \underline{S}(P; f) < \varepsilon.$$

Demonstração. Suponhamos que f seja integrável, isto é, que $\underline{\int}_a^b f = \bar{\int}_a^b f$. Dado $\varepsilon > 0$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{\int}_a^b f - \underline{\int}_a^b f = \inf_P \bar{S}(P; f) - \sup_P \underline{S}(P; f) = \inf_P \bar{S}(P; f) + \inf_P [-\underline{S}(P; f)] = \\ &= \inf_P [\bar{S}(P; f) - \underline{S}(P; f)], \end{aligned}$$

donde existe uma partição P de $[a, b]$ tal que $\bar{S}(P; f) - \underline{S}(P; f) < \varepsilon$.

Reciprocamente, suponhamos que para todo $\varepsilon > 0$ existe uma partição P de $[a, b]$ tal que $\bar{S}(P; f) - \underline{S}(P; f) < \varepsilon$. Já sabemos que $\bar{\int}_a^b f \geq \underline{\int}_a^b f$. Supondo $\bar{\int}_a^b f > \underline{\int}_a^b f$, podemos tomar $\varepsilon = \bar{\int}_a^b f - \underline{\int}_a^b f > 0$. Daí, seja qual for a partição P ,

$$\underline{S}(P; f) \leq \int_a^b f < \bar{\int}_a^b f \leq \bar{S}(P; f),$$

donde

$$\bar{S}(P; f) - \underline{S}(P; f) \geq \bar{\int}_a^b f - \underline{\int}_a^b f = \varepsilon,$$

o que contradiz a suposição. Assim, $\bar{\int}_a^b f = \underline{\int}_a^b f$ e, portanto, f é integrável. ■

Como são equivalentes, deixaremos de fazer distinção de nomenclatura entre as integrais de Riemann e de Darboux. Utilizaremos sempre a denominação *integral de Riemann*, *função integrável à Riemann*, etc. para nos referir a estas integrais e usufruir dos resultados obtidos para ambas.

Deixamos a cargo do leitor verificar a validade da seguintes propriedades operatórias:

Proposição 2.2. *Dadas $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integráveis e $r \in \mathbb{R}$, temos:*

- (a) *Se $c \in (a, b)$, então $f|_{[a, c]}$ e $f|_{[c, b]}$ são integráveis e $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$;*
- (b) $\int_a^b [f + g] = \int_a^b f + \int_a^b g$;
- (c) $\int_a^b r f = r \int_a^b f$;
- (d) *Se $f \geq 0$, então $\int_a^b f \geq 0$.*

Em 1964, Riemann apresentou a seguinte versão do TFC:

Teorema 2.5. *(Teorema Fundamental do Cálculo de Riemann) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável e f' é integrável, então*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'. \quad (2.18)$$

Demonstração. Para qualquer partição $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ de $[a, b]$, em virtude do Teorema do Valor Médio aplicado a cada subintervalo desta partição, existem $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n$ tais que $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, e

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^n f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \quad (2.19)$$

Por outro lado, o Teorema 2.3 nos garante que f' é limitada. Assim, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, existem M_i e m_i o sup e o inf de f' no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, respectivamente. Como $m_i \leq f'(\xi_i) \leq M_i$, segue-se de (2.19) que

$$\underline{S}(P; f') \leq f(b) - f(a) \leq \bar{S}(P; f').$$

Portanto, $f(b) - f(a) = \int_a^b f'$. ■

Observe que um passo adiante foi dado em relação ao TFC-Cauchy (Teorema 2.2), visto que agora não precisamos exigir a continuidade de f' . Porém, ainda temos de admitir a integrabilidade da derivada para obter a validade da fórmula (2.18). Adiante¹¹ discutiremos a ineficácia do TFC-Riemann.

Em 1894, o matemático holandês Thomas Stieltjes (1856-1894) publicou no artigo *Recherches sur les fractions continues* uma versão modificada da integral de Riemann, também baseada em somas de Cauchy. Resumidamente, Stieltjes utilizou uma função monótona não-decrescente α e substituiu $f(\xi)(x - y)$ em $S(P; f)$ por $f(\xi)[\alpha(x) - \alpha(y)]$. A integral resultante quando a norma da partição tende a zero é denominada *integral de Riemann-Stieltjes*.¹² Modificações análogas podem ser feitas de modo a obter-se as *integrais de Darboux-Stieltjes* superior e inferior.¹³ O método de Stieltjes ainda é aplicado a outras integrais, obtendo-se assim as *integrais tipo-Stieltjes*.

Figura 2.7: Thomas Joannes Stieltjes (1856-1894).



Fonte: CloudNine.¹⁴

A integral de Riemann-Stieltjes melhora as propriedades da integral de Riemann e tem aplicações principalmente em Probabilidade e Análise Funcional. Contudo, uma teoria da integração mais poderosa é necessária, pois muitos dos problemas que destacaremos adiante¹⁵ presentes na teoria de Riemann se estendem à de Stieltjes. Antes de exibí-los, precisamos desenvolver vários conceitos necessários à formulação rigorosa dessas inconveniências.

2.4 Conjuntos de medida nula

O próximo grande avanço no desenvolvimento da teoria da integração foi dado pelo matemático francês Henri Lebesgue (1875-1941) com seu novo conceito de integral. Trataremos detalhadamente da *integral de Lebesgue* no Capítulo 3. Por hora, é importante ressaltar que Lebesgue desenvolveu vastamente uma importante área de estudos, hoje

¹¹Cf. Seção 2.6.3.

¹²Observe que a definição de Riemann é o caso particular em que escolhe-se g como sendo a função identidade. Dessa forma, a integral de Riemann-Stieltjes é uma generalização da integral de Riemann.

¹³Cf. Rudin, 1976, p. 122.

¹⁴Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:ThomasStieltjes.jpeg>. Acesso em: 19 Out. 2015.

¹⁵Cf. Seção 2.6, passim.

conhecida como Teoria da Medida. Em seus trabalhos, Lebesgue forneceu uma caracterização muito eficiente para a integral de Riemann baseada em seu conceito de medida, hoje denominada *medida de Lebesgue*. Veremos esta caracterização na Seção 2.5. Para isto, precisamos definir um caso particular da medida de Lebesgue.

A *amplitude* (ou *comprimento*) dos intervalos (a, b) , $(a, b]$, $[a, b)$ e $[a, b]$ é definida por $b - a$. Se I é um destes intervalos, sua amplitude será denotada por $\text{amp}(I)$. Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tem *medida nula* (ou *medida zero*) quando, para cada $\varepsilon > 0$, existe uma coleção enumerável de intervalos abertos $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ tal que $X \subset \bigcup I_n$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{amp}(I_n) < \varepsilon. \quad (2.20)$$

Em outras palavras, existe uma cobertura (I_n) de X por meio de intervalos abertos cuja soma das amplitudes é tão pequena quanto se queira. Neste caso escrevemos $m(X) = 0$.

Façamos duas observações oportunas a respeito da definição de conjunto de medida nula. A primeira é que, obviamente, a exigência “ $< \varepsilon$ ” em (2.20) poderia ser substituída por “ $\leq \varepsilon$ ”. A segunda é que exigimos intervalos abertos para que, uma vez ou outra, possamos utilizar o Teorema de Borel-Lebesgue. Porém, poderíamos ter considerado famílias de intervalos fechados (e não-degenerados) ou semiabertos. O resultado seria o mesmo. De fato, seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto com a seguinte propriedade: dado $\varepsilon' > 0$, existe uma coleção enumerável de intervalos não-degenerados $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ tais que $X \subset \bigcup I_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \text{amp}(I_n) < \varepsilon'$. Então, para cada $\varepsilon > 0$, podemos encontrar uma coleção de intervalos $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, não-degenerados, e tais que $X \subset \bigcup I_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \text{amp}(I_n) < \varepsilon/2$. Para cada I_k em $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, seja J_k um intervalo aberto contido em I_k e de amplitude igual a $\text{amp}(I_k) + \varepsilon/2^{k+1}$. Então $X \subset \bigcup I_n \subset \bigcup J_n$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{amp}(J_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\text{amp}(I_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \right] < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

donde $m(X) = 0$. Dito isto, para concluir que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tem medida nula é suficiente mostrar que, para cada $\varepsilon > 0$ dado, podemos obter uma cobertura enumerável de X por meio de intervalos não-degenerados cuja soma das amplitudes não supera ε . Utilizaremos este fato adiante sem maiores comentários.

O próximo exemplo mostra que um intervalo $[a, b]$ só tem medida nula se for degenerado, isto é, $a = b$. Observe que, neste caso, a amplitude também é nula.

Exemplo 2.1. Qualquer intervalo compacto $[a, b]$, com $a < b$, não tem medida nula. Com efeito, dada uma cobertura qualquer de $[a, b]$ por meio de intervalos abertos, podemos extrair uma subcobertura finita $I_1, I_2, \dots, I_n$ em virtude do Teorema de Borel-Lebesgue. Como $a \in [a, b] \subset \bigcup_{i=1}^n I_i$, existe um intervalo (a_1, b_1) desta cobertura tal que $a \in (a_1, b_1)$. Segue-se que $a > a_1$. Se $b_1 \leq b$, então $b_1 \in [a, b] \subset \bigcup_{i=1}^n I_i$, donde existe outro intervalo (a_2, b_2) desta cobertura tal que $b_1 \in (a_2, b_2)$. Novamente, $b_1 > a_2$. Se $b_2 \leq b$, repetimos o processo. Como estes intervalos estão em número finito e $b \in [a, b] \subset \bigcup_{i=1}^n I_i$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que o intervalo (a_k, b_k) desta cobertura contém b . Em particular, $b_k > b$. Com isso, obtivemos k intervalos abertos $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_k, b_k)$ da cobertura $I_1, I_2, \dots, I_n$ tais que $b_j - a_{j+1} > 0$ para $j = 1, 2, \dots, k-1$ e, além disso, $a_1 < a < b < b_k$, donde

$b_k - a_1 > b - a$. Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \text{amp}(I_i) &\geq \sum_{i=1}^k (b_i - a_i) \\ &= (b_k - a_k) + (b_{k-1} - a_{k-1}) + \cdots + (b_1 - a_1) \\ &= b_k + (b_{k-1} - a_k) + (b_{k-2} - a_{k-1}) + \cdots + (b_2 - a_3) + (b_1 - a_2) + a_1 \\ &\geq b_k - a_1 > b - a. \end{aligned}$$

Consequentemente, $[a, b]$ não tem medida nula. $\blacklozenge$

Em um contexto mais geral, podemos identificar a amplitude de um intervalo com sua *medida*. Isto se enquadra na chamada *medida externa de Lebesgue* em $\mathbb{R}$. De modo sucinto, a medida externa de Lebesgue de um conjunto é o ínfimo (em relação às famílias de coberturas por intervalos) das somas das amplitudes dos intervalos como em (2.20), onde tivemos um ínfimo 0. Maiores detalhes podem ser encontrados em qualquer texto introdutório de Teoria da Medida. Recomendamos Royden (1988). Na Seção 3.4.1 do próximo capítulo veremos como aplicar a integral de Lebesgue-Riesz para definir a *medida de Lebesgue* (em $\mathbb{R}$) de um *conjunto mensurável* (de números reais).

Vejamos algumas características interessantes dos conjuntos de medida nula.

Proposição 2.3. *Todo conjunto enumerável tem medida nula.*

Demonstração. Sejam $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ um conjunto enumerável e $\varepsilon > 0$ dado. Para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos cobrir o elemento x_n de X pelo intervalo

$$I_n = (x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}).$$

Assim, $X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{amp}(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Logo, X tem medida nula. $\blacksquare$

Exemplo 2.2. Segue-se da Proposição 2.3 que os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e até mesmo o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais (que é denso na reta), têm medida nula. $\blacklozenge$

Proposição 2.4.

- (a) Se $m(A) = 0$ e $B \subset A$, então $m(B) = 0$;
- (b) Se $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, têm medida nula, então $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ tem medida nula.

Demonstração. O demonstração do item (a) é trivial. Mostremos o item (b). Para isto, seja dado $\varepsilon > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, como A_n tem medida nula, existem intervalos abertos $I_{n1}, I_{n2}, \dots$ tais que $A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{nk}$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \text{amp}(I_{nk}) < \varepsilon/2^n$. Daí, enumerando os I_{nk} , $n, k \in \mathbb{N}$, como $I_1, I_2, I_3, \dots$ (o que podemos fazer, pois $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável), temos

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{nk} = \bigcup \{I_{nk}; n, k \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

e, ainda,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{amp}(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \text{amp}(I_{nk}) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Consequentemente, A tem medida nula. ■

Num tratamento mais rigoroso observaríamos que o argumento utilizado na demonstração acima é respaldado por propriedades das chamadas *séries duplas*. De fato, como as séries são absolutamente convergentes, pois convergem e são de termos positivos, a ordem dos somatórios não interfere no valor da soma. Ao leitor interessado é suficiente ler Bartle (1964, p. 381). Para um tratamento mais completo e explicado, a referência Habil (2014) é uma melhor escolha.

Exemplo 2.3. Como vimos no Exemplo 2.2, o conjunto enumerável $\mathbb{Q}$ dos números racionais tem medida nula. Ora, sendo assim, podemos afirmar que o conjunto não-enumerável $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dos números irracionais não tem medida nula. Com efeito, se $\mathbb{I}$ fosse de medida nula, pela item (b) da Proposição 2.4, $\mathbb{I} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ teria medida nula, o que é absurdo. ◆

Poderíamos então nos questionar se todos os conjuntos de medida nula são enumeráveis, isto é, se a recíproca da Proposição 2.3 é verdadeira. A resposta é negativa, como veremos agora.

2.4.1 Conjunto de Cantor ternário

Matemáticos de verdade sabem qual a verdadeira importância de um contraexemplo. Historicamente, esse é um dos principais compostos no combustível da Matemática, além de ser uma fonte rica de informações a respeito do desenvolvimento de ideias ao longo do tempo. Existem livros que se propõem especificamente a oferecer contraexemplos, tamanha é a importância que eles têm nas ciências matemáticas. Veja, por exemplo, Steen e Seebach Jr. (1995), Gelbaum e Olmsted (2003) ou Klymchuk (2010), para citar alguns bons exemplos.

Importantes contraexemplos foram dados pelo matemático alemão Georg Cantor (1845-1918) com os chamados *conjuntos de Cantor*. Falaremos sobre o *conjunto de Cantor ternário* K , no intervalo $[0,1]$, apresentado por Cantor em seu *De la puissance des ensembles parfaits de points* de 1884. Uma discussão mais completa sobre a teoria dos conjuntos de Cantor, além de detalhes adicionais sobre a exposição que faremos abaixo, pode ser encontrada no ótimo livro *The Elements of Cantor Sets* de Robert W. Vallin.¹⁶

Na literatura matemática, é usual encontrarmos duas formas equivalentes de definir o conjunto de Cantor ternário. A primeira diz que K é o conjunto formado pelos números em $[0,1]$ cuja expansão na base 3 têm apenas os algarismos 0 e 2. Assim, $1/4 \in K$, pois tem expansão $0,020202\dots$ na base 3. Notemos que, nesta definição, os múltiplos inteiros de $1/3^n$ do intervalo $[0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, também fazem parte do conjunto de Cantor, pois, por exemplo, $1/9$ tem sua expansão na base 3 dada por $0,00222\dots$ ¹⁷

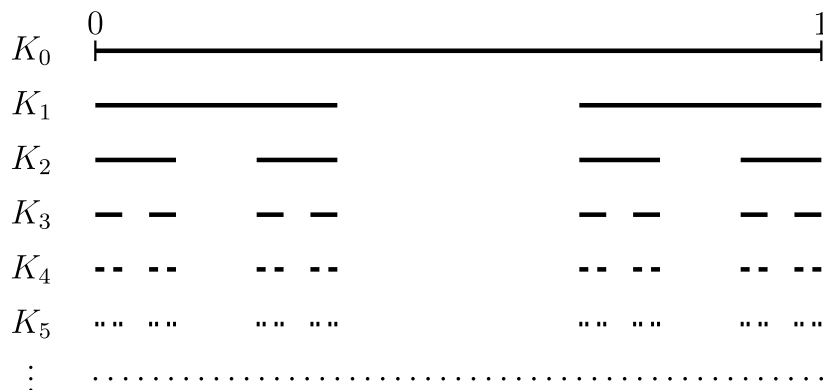
A segunda forma de definir o conjunto de Cantor, embora seja mais trabalhosa, pode ser mais facilmente interpretada por ter um apelo geométrico explícito. A construção

¹⁶Cf. Vallin (2013).

¹⁷Assim como o número 1 também tem a representação $0,99999\dots$ na base 10, o número $0,1$ (que é a expansão de $1/3$ na base 3) também tem a representação $0,02222\dots$ na base 3.

de K é feita por etapas. Na primeira, obtemos o conjunto K_1 removendo o terço médio aberto do intervalo $[0, 1]$, isto é, $K_1 = [0, 1] \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ (Figura 2.8). Vemos

Figura 2.8: Representação geométrica das etapas da construção de K .



Fonte: Elaborada pelo autor.

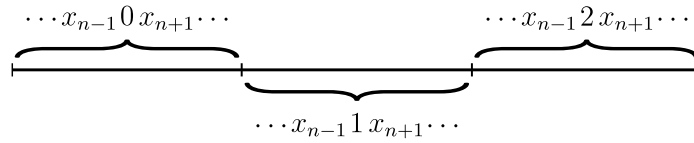
que K_1 é formado por 2^1 intervalos compactos de amplitude $1/3^1$. Em particular K_1 é compacto. Supondo obtido o conjunto compacto K_{n-1} , formado por 2^{n-1} intervalos compactos de amplitude $1/3^{n-1}$, obtemos K_n removendo os terços médios abertos de K_{n-1} . Assim, K_n é um conjunto compacto formado por $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ intervalos compactos de amplitude $1/3^{n-1} \cdot 1/3 = 1/3^n$. O *conjunto de Cantor ternário* é definido como a interseção $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Observe que $0 \in K$, pois não foi removido em qualquer etapa. Desta forma, K é não vazio. Além disso, observando que $K_1 \supset K_2 \supset \dots$, em virtude do Princípio dos Intervalos Encaixados, K é compacto.

A equivalência com a primeira definição vem do fato de que, na construção que fizemos acima, excluímos a possibilidade de haver números cuja expansão na base 3 contenha algarismos 1 (veja Figura 2.9). De fato, seja $x \in K$. Sendo

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$$

a expansão de x na base 3, a qual denotaremos por $x = .x_1x_2x_3\dots$, devemos ter $x_1 \neq 1$ pois removemos o “lar” $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ dos números desta natureza na construção de K_1 . Assim, $x_1 = 0$ ou 2 . Também será $x_2 \neq 1$ por motivo análogo, e assim por diante. Vale ressaltar que os extremos dos intervalos que compõem cada etapa (os quais são múltiplos inteiros de $1/3^n$) também pertencem ao conjunto de Cantor. Isso se verifica facilmente em ambas as definições. Com efeito, na primeira, como já observamos, estes números têm apenas algarismos 0 e 2 em suas expansões na base 3. Os pontos que estão num extremo inferior tem o algarismo “0” se repetindo infinitas vezes, e os de extremo superior têm o algarismo “2” aparecendo infinitas vezes. Na segunda definição basta notar que estes pontos nunca são removidos e, portanto, pertencem a K . Uma demonstração topológica de que K é não-enumerável pode ser encontrada em Lima (2013b, p. 179). Aqui, faremos uma demonstração baseada no clássico “argumento da diagonal” de Cantor. Para isto, precisamos mostrar que a expansão de um número do conjunto de Cantor na base 3 é

Figura 2.9: Relação algarismo-posição dos números com expansão na base 3.



Fonte: Elaborada pelo autor.

única. Ou seja, se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{3^n}, \quad (2.21)$$

onde os algarismos x_n e y_n são 0 ou 2, então $x_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Suponhamos a igualdade (2.21) e que, mesmo assim, exista $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \neq y_n$. Seja p em $\mathbb{N}$ o menor número com esta propriedade. A igualdade (2.21) se resume a

$$\sum_{n=p}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{y_n}{3^n}.$$

Sem perda de generalidade, digamos que seja $x_p = 0$ e $y_p = 2$. Daí, temos

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{y_n}{3^n} = \frac{2}{3^p} + \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{y_n}{3^n} \geq \frac{2}{3^p}. \quad (2.22)$$

Por outro lado, como $x_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \leq \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3^p}. \quad (2.23)$$

As afirmações (2.22) e (2.23) são contraditórias. Portanto, $x_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que mostra que a expansão de um elemento do conjunto de Cantor na base 3 é única.

Mostraremos agora que K é não-enumerável. Faremos isso mostrando que, qualquer que seja a enumeração dos elementos de K , existem elementos que não são incluídos. Assim, suponhamos que $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ seja uma enumeração arbitrária dos elementos de K , digamos,

$$\begin{aligned} x_1 &= .x_{11}x_{12}x_{13}\dots, \\ x_2 &= .x_{21}x_{22}x_{23}\dots, \\ x_3 &= .x_{31}x_{32}x_{33}\dots, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Seja $x = .a_1a_2a_3\dots$ tal que

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } a_{nn} = 0, \\ 2 & \text{se } a_{nn} = 2. \end{cases}$$

Então x tem representação na base 3 diferente de cada elemento da lista acima. Pela unicidade da representação, $x \neq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, como queríamos demonstrar.

Encerramos observando que $m(K) = 0$. Com efeito, como $K \subset K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e K_n é formado por 2^n intervalos de amplitude $1/3^n$, estes formam uma cobertura $\mathcal{C}$ de K por intervalos fechados cuja soma das amplitudes é $(2/3)^n$. Desta cobertura obtemos uma subcobertura $\mathcal{C}'$ formada pelos interiores dos intervalos de $\mathcal{C}$. A soma das amplitudes dos intervalos dessa nova cobertura ainda é $(2/3)^n$. Tomando n grande o suficiente para que seja $(2/3)^n < \varepsilon$, concluímos que os pontos de K que estão em $\mathcal{C}'$ têm medida nula. Os demais pontos de K são os extremos dos intervalos de $\mathcal{C}$ e, portanto, estão em número finito. Pelas Proposições 2.3 e 2.4, $m(K) = 0$.

2.4.2 Conjunto de Cantor generalizado

Figura 2.10: Henry John Stephen Smith (1826-1883), Vito Volterra (1860-1940) e Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918).



Fonte: Domínio Público.¹⁸

Apresentaremos um outro conjunto de Cantor que também nos será útil para contra-exemplos. Esta versão generalizada não tem medida nula. Sua construção é similar à do Cantor ternário, mas o resultado é bem diferente.

Iniciamos observando que, na n -ésima etapa da construção do conjunto de Cantor ternário, removemos 2^{n-1} intervalos abertos de amplitude $1/3^n$. Assim, a soma das amplitudes dos intervalos removidos na construção de K é

$$\begin{aligned} 2^0 \cdot 1/3 + 2^1 \cdot 1/3^2 + 2^2 \cdot 1/3^3 + \dots + 2^{n-1} \cdot 1/3^n + \dots &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 - 2/3}\right) = 1 = \text{amp}([0, 1]). \end{aligned}$$

Ou seja, de $[0, 1]$ retiramos uma família de intervalos cuja soma das amplitudes (“a medida”) é exatamente a amplitude de todo o intervalo. Como o conjunto de Cantor ternário é o que “sobra”, a conta acima sugere o motivo pelo qual este conjunto tem medida nula. É neste ponto faremos uma pequena mudança de modo a obter nosso próximo conjunto de Cantor.

¹⁸Imagens ordenadamente disponíveis em: <https://en.wikipedia.org/wiki/File:HenryJohnStephenSmith2.jpg>, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Vito_Volterra.jpg e <http://i12bent.tumblr.com/post/3622180726/georg-cantor-german-mathematician-and-philosopher>. Acesso em: 19 Out. 2015.

Seja (a_n) uma sequência de números positivos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = c < 1$. Faremos como na seção anterior. Na primeira etapa removemos do centro de $[0, 1]$ um intervalo aberto de amplitude a_1 de modo a obter E_1 , formado por 2^1 intervalos fechados. Na segunda etapa, do centro de cada um dos dois intervalos restantes removemos um intervalo de amplitude $a_2/2^1$, donde obtemos o conjunto E_2 formado por 2^2 intervalos fechados. Indutivamente, supondo que obtivemos o conjunto E_n formado por 2^n intervalos fechados, de cada um destes removemos um intervalo aberto de amplitude $a_{n+1}/2^n$, o que nos fornece o conjunto E_{n+1} formado por 2^{n+1} intervalos fechados. Como $E_1 \supset E_2 \supset \dots$, novamente pelo Princípio dos Intervalos Encaixados, obtemos o conjunto de Cantor generalizado $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, o qual é não-vazio e compacto.

Afirmamos que E não tem medida nula. De fato, se pudéssemos cobrir E com intervalos cuja soma das amplitudes fosse menor do que $1 - c$, então obteríamos uma cobertura de $[0, 1]$ através de intervalos cuja soma das amplitudes é menor do que $(1 - c) + c = 1$, o que é absurdo (veja o Exemplo 2.1).

Também afirmamos que E não contém intervalos (não-degenerados). Com efeito, se J é um intervalo, então $\text{amp}(J) > 0$. Ora, o n -ésimo passo E_n da construção de E é composto por 2^n intervalos disjuntos de amplitude menor do que $1/2^n$.¹⁹ Tomando n suficientemente grande, obtemos um passo E_n formado por intervalos disjuntos de amplitude menor do que $\text{amp}(J)$. Logo, $J \not\subset E_n$ e, conseqüentemente, $J \not\subset E \subset E_n$. O conjunto E chama-se *conjunto de Cantor generalizado* ou, como é mais apropriado, *conjunto de Smith–Volterra–Cantor*, em honra aos matemáticos que o idealizaram: Henry Smith (1826-1883) em 1875, Vito Volterra (1860-1940) em 1881 e finalmente por Cantor em 1883.

Os conjuntos de Cantor que construímos nesta seção e na anterior apresentam outras (estranhas) propriedades. Embora sejam de fácil verificação, não as exibiremos aqui simplesmente por não serem necessárias ao desenvolvimento do texto. Ao leitor interessado, voltamos a recomendar Vallin (2013). Utilizaremos apenas os fatos provados acima para a construção de alguns exemplos e contraexemplos.

2.5 Caracterização das funções Riemann-integráveis

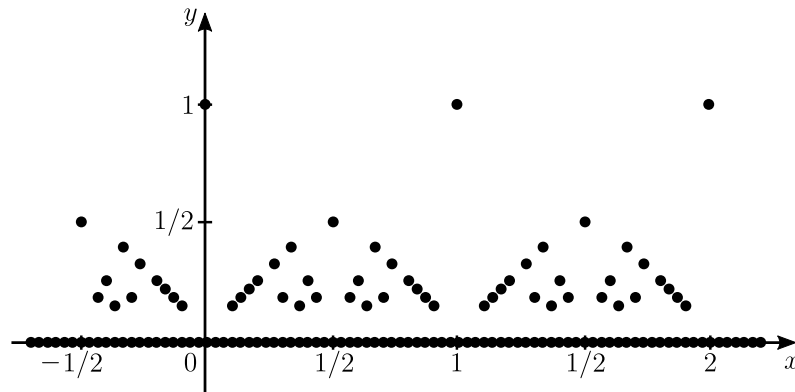
Como já comentamos, qualquer função seccionalmente contínua é Riemann-integrável. Mais geral ainda, o próprio Riemann forneceu em seu texto um exemplo de função integrável com uma quantidade infinita de descontinuidades. Outro exemplo de função integrável cujo conjunto dos pontos de descontinuidade é infinito é dado pela *função de Thomae* $\mathcal{T} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida da seguinte forma:

$$\mathcal{T}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1/q & \text{se } x = p/q, \text{ onde } p/q \text{ é irredutível, } p, q \in \mathbb{Q} \text{ e } q > 0. \end{cases}$$

¹⁹Esta seria a amplitude se simplesmente dividíssemos sucessivamente $[0, 1]$ em duas partes iguais. Mas a amplitude deve ser menor, pois antes de fazer cada divisão tivemos de subtrair as quantidades $a_k/2^{k-1}$.

Esta função (Figura 2.11) é contínua nos irracionais e descontínua nos racionais²⁰, e é integrável em qualquer intervalo²¹, com integral 0.²² Nos cabe perguntar, portanto, o quão

Figura 2.11: Gráfico da função $\mathcal{T}$ de Thomae.



Fonte: Elaborada pelo autor.

descontínua pode ser uma função integrável. Esta pergunta foi respondida por Lebesgue em sua tese de doutorado *Intégrale, longueur, aire* de 1902. Sua resposta chama-se, hoje em dia, de *Teorema de Lebesgue*, o principal resultado desta seção. Este teorema consiste em uma eficiente caracterização das funções Riemann-integráveis em termos de conjuntos de medida nula. Para demonstrá-lo, precisamos estabelecer alguns conceitos e resultados prévios.

Os próximos dois conceitos a serem introduzidos nos permitem avaliar de modo eficaz o comportamento de uma função em duas situações: (1) num dado conjunto; e (2) nas proximidades de um ponto.

Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada, $X \subset [a, b]$ e $c \in [a, b]$. Definimos a *oscilação de f no conjunto X* como sendo a diferença

$$\omega(f; X) = \sup\{f(x) \in \mathbb{R}; x \in X\} - \inf\{f(x) \in \mathbb{R}; x \in X\}.$$

Agora, definimos o *limite superior de f no ponto c* por

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} L_\delta(c),$$

onde, para cada $\delta > 0$,

$$L_\delta(c) = \sup\{f(x) \in \mathbb{R}; x \in [a, b] \cap (c - \delta, c + \delta)\}.$$

Analogamente, o *limite inferior de f em c* é definido por

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} l_\delta(c),$$

²⁰Cf. Lima (2013b, p. 230).

²¹Após estabelecido o Teorema 2.6 a integrabilidade é imediata, pois $\mathbb{Q}$ tem medida nula. Além disso, $\int_a^b \mathcal{T} = 0$ em qualquer intervalo, pois a integral inferior de $\mathcal{T}$ em $[a, b]$ é trivialmente zero ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é denso em $[a, b]$).

²²Cf. Abbott (2001, p. 203).

onde, para cada $\delta > 0$,

$$l_\delta(c) = \inf\{f(x) \in \mathbb{R}; x \in [a, b] \cap (c - \delta, c + \delta)\}.$$

A partir destes conceitos, definimos a *oscilação de f no ponto c* como

$$\omega(f; c) = \overline{\lim}_{x \rightarrow c} f(x) - \underline{\lim}_{x \rightarrow c} f(x).$$

Observe que sempre existe a oscilação de uma função limitada. Para a existência da oscilação em um ponto, exige-se apenas que a função seja limitada numa vizinhança do mesmo. Além disso, $\omega(f; c)$ e $\omega(f; X)$, quando existem, são sempre números não-negativos.

A seguinte proposição será de grande utilidade na demonstração do principal resultado desta seção.

Proposição 2.5. *A função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $c \in [a, b]$ se e somente se $\omega(f; c) = 0$.*

Demonstração. Sendo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, seja dado $\varepsilon > 0$. Então existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que

$$x \in [a, b] \text{ e } |x - c| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow f(x) < f(c) + \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } f(x) > f(c) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, para todo $x \in [a, b] \cap (c - \delta_\varepsilon, c + \delta_\varepsilon)$, segue-se que $f(x) < f(c) + \varepsilon/2$, donde

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} L_\alpha \leq L_{\delta_\varepsilon} \leq f(c) + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.24)$$

De modo análogo temos

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow c} f(x) \geq f(c) - \varepsilon/2. \quad (2.25)$$

Portanto, de (2.24) e (2.25),

$$0 \leq \omega(f; c) = \overline{\lim}_{x \rightarrow c} f(x) - \underline{\lim}_{x \rightarrow c} f(x) \leq \varepsilon.$$

Dado que ε é arbitrário, concluímos que $\omega(f; c) = 0$.

Reciprocamente, supondo $\omega(f; c) = 0$, temos

$$0 = \omega(f; c) = \overline{\lim}_{x \rightarrow c} f(x) - \underline{\lim}_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} L_\delta - \lim_{\delta \rightarrow 0^+} l_\delta = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} (L_\delta - l_\delta).$$

Daí, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que, se $x \in [a, b] \cap (c - \delta_\varepsilon, c + \delta_\varepsilon)$, temos $|L_{\delta_\varepsilon} - l_{\delta_\varepsilon}| < \varepsilon$. Logo,

$$x \in [a, b] \cap (c - \delta_\varepsilon, c + \delta_\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(c)| \leq L_{\delta_\varepsilon} - l_{\delta_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Portanto, f é contínua em c . ■

Estamos prontos para demonstrar o principal teorema desta seção, cuja primeira aparição data de 1902, no trabalho *Intégrale* de Lebesgue.

Teorema 2.6. *(Teorema de Lebesgue) Uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável a Riemann se, e somente se, o conjunto D de seus pontos de descontinuidade tem medida nula.*

Demonstração. Suponhamos f integrável. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$D_n = \{x \in [a, b]; \omega(f; x) \geq 1/n\}.$$

Segue imediatamente da Proposição 2.5 que

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n.$$

Se mostrarmos que D_m tem medida nula para cada $m \in \mathbb{N}$, pela Proposição 2.4, D terá medida nula. Assim, fixemos $m \in \mathbb{N}$.

Como f é integrável, pelo Corolário 2.1, existe uma partição P de $[a, b]$, digamos, $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$, tal que $0 \leq \bar{S}(P; f) - \underline{S}(P; f) < \varepsilon/m$. Escrevamos $m \subset i$ para indicar que o intervalo (x_{i-1}, x_i) contém algum ponto de D_m e $m \not\subset i$ caso contrário. Ora, se $m \subset i$, então $M_i - m_i \geq 1/m$, onde M_i e m_i são, respectivamente, o sup e o inf de f em $[x_{i-1}, x_i]$. Daí,

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{m} &> \bar{S}(P; f) - \underline{S}(P; f) = \sum_{m \subset i} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{m \not\subset i} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \geq \\ &\geq \sum_{m \subset i} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \geq \sum_{m \subset i} \frac{1}{m} (x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{m} \sum_{m \subset i} (x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{m \subset i} (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon.$$

Isto significa que o conjunto dos pontos de D_m que estão nos intervalos (x_{i-1}, x_i) tem medida nula. Os demais pontos de D_m estão contidos em P , que também tem medida nula em virtude da Proposição 2.3. Assim, D_m tem medida nula, o que mostra a primeira parte.

Reciprocamente, suponhamos que D tenha medida nula e seja dado $\varepsilon > 0$. Como f é limitada, existe $M = \omega(f; [a, b])$. Seja (I_n) uma cobertura de D por intervalos abertos tais que

$$\sum \text{amp}(I_n) < \varepsilon/2M. \quad (2.26)$$

Ora, para cada $x \in [a, b] \setminus D$, podemos encontrar um intervalo aberto J_x contendo x tal que $\omega(f; J_x \cap [a, b]) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. De fato, da continuidade de f em x , existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que

$$y \in (x - \delta_\varepsilon, x + \delta_\varepsilon) \cap [a, b] \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Tomando $J_x = (x - \delta_\varepsilon, x + \delta_\varepsilon)$, seja qual for o $y \in J_x \cap [a, b]$, temos $f(y) < f(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$, donde

$$\sup\{f(y) \in \mathbb{R}; y \in J_x \cap [a, b]\} \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \quad (2.27)$$

e $f(y) > f(x) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$, donde

$$\inf\{f(y) \in \mathbb{R}; y \in J_x \cap [a, b]\} \geq f(x) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)}. \quad (2.28)$$

De (2.27) e (2.28) segue-se que

$$\omega(f; J_x \cap [a, b]) \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \quad (2.29)$$

Obtemos assim uma cobertura $(J_x)_{x \in [a,b] \setminus D}$ de $[a,b] \setminus D$ por intervalos abertos. Desta forma, a união desta família com (I_n) nos dá uma cobertura de $[a,b]$ por meio de abertos, a qual admite uma subcobertura finita $I_{n_1}, I_{n_2}, \dots, I_{n_r}, J_{x_1}, J_{x_2}, \dots, J_{x_s}$ em virtude do Teorema de Borel-Lebesgue. Os extremos destes intervalos que pertencem a $[a,b]$ juntamente com a e b formam uma partição P de $[a,b]$, digamos,

$$P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = b\}.$$

Observe que, para cada $i = 1, 2, \dots, m$, o intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ ou está contido no fecho de um dos I_{n_j} , $j = 1, 2, \dots, r$, ou está contido em um dos J_{x_k} , $k = 1, 2, \dots, s$. Indicaremos o primeiro grupo por $i \in I$ e o segundo por $i \in J$. Além disso, indicaremos por ω_i a oscilação de f em $[t_{i-1}, t_i]$. Note que, para todo $i = 1, 2, \dots, m$,

$$\omega_i \leq \omega(f; [a, b]) = M. \quad (2.30)$$

Dito isso, temos:

$$\begin{aligned} \bar{S}(f; P) - \underline{S}(f; P) &= \sum \omega_i(t_i - t_{i-1}) && \text{(Pois } M_i - m_i = \omega_i) \\ &= \sum_{i \in I} \omega_i(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i \in J} \omega_i(t_i - t_{i-1}) && \text{(Separando os grupos)} \\ &\leq \sum_{i \in I} M(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i \in J} \frac{\varepsilon(t_i - t_{i-1})}{2(b-a)} && \text{(De (2.29) e (2.30))} \\ &< \frac{M\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon(b-a)}{(b-a)} = \varepsilon. && \text{(De (2.26))} \end{aligned}$$

Pelo Corolário 2.1, f é integrável, como queríamos. ■

Este teorema caracteriza definitivamente a classe das funções Riemann-integráveis. Com ele vemos o que a mudança que Riemann realizou na definição original de Cauchy gerou e o quanto a classe das funções integráveis foi expandida. Na integral de Cauchy, era possível integrar uma função cujos pontos de descontinuidade fossem finitos. Agora, até mesmo uma função que possua uma quantidade infinita de descontinuidades pode ser integrada, desde que estes pontos correspondam a um conjunto de medida nula. Ora, obtemos não só uma forma eficiente de determinar quando uma função é Riemann-integrável, mas uma forte caracterização de quando uma função **não é**. Na próxima seção exemplificaremos como, a partir do Teorema 2.6, obtemos classes enormes de funções que não são integráveis a Riemann.

Não obstante, apesar de ser útil em evidenciar deficiências na integral de Riemann, o Teorema de Lebesgue é interessante do ponto de vista prático. Como aplicação, mostremos que o produto fg de duas funções Riemann-integráveis f e g é Riemann-integrável.²³

Exemplo 2.4. Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integráveis a Riemann e D_{fg} , D_f e D_g os conjuntos dos pontos de descontinuidade de fg , f e g , respectivamente. Como f e g são integráveis, $m(D_f) = m(D_g) = 0$, donde $m(D_f \cup D_g) = 0$. Ora, se $x \in D_{fg}$, então ou f é descontínua em x ou g o é, pois se ambas fosse contínuas em x também o seria fg (o produto de funções contínuas é contínuo), o que não é o caso. Assim, $x \in D_f$ ou $x \in D_g$. Em todo caso, $x \in D_f \cup D_g$, ou seja, $D_{fg} \subset D_f \cup D_g$. Como $D_f \cup D_g$ tem medida nula, segue-se que $m(D_{fg}) = 0$, donde fg é integrável ◆

²³Voltaremos a falar deste exemplo na Seção 3.8.2 do próximo capítulo. Veremos que esta propriedade constitui uma deficiência presente nas demais integrais que estudaremos neste trabalho, e que não tem solução através de integrais que generalizam a integral de Riemann.

Também é imediato mostrar, por exemplo, que a soma de funções integráveis é integrável. A praticidade do Teorema de Lebesgue se reflete em vários outros tipos de resultado, mas não são interessantes para nosso objetivo. Encerramos esta seção exibindo mais um exemplo de função integrável com uma quantidade infinita (não enumerável) de descontinuidades.

Exemplo 2.5. Seja K o conjunto de cantor ternário em $[0, 1]$.²⁴ Definamos $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ pondo $f(x) = 1$ se $x \in K$ e $f(x) = 0$ se $x \in [0, 1] \setminus K$. Não é difícil mostrar que f é contínua nos pontos $x \in [0, 1] \setminus K$ e descontínua nos pontos $x \in K$.²⁵ Como $m(K) = 0$, f é integrável em virtude do Teorema de Lebesgue. ♦

2.6 Deficiências da integral de Riemann

Nesta seção, exibiremos algumas das mais importantes deficiências da integral de Riemann e indicaremos quais delas são resolvidas (total ou parcialmente) nos próximos capítulos, e por quais integrais.

Há diversos aspectos problemáticos na teoria da integração de Riemann, dos quais destacaremos: (1) a escassez de funções Riemann-integráveis; (2) as limitações operacionais; (3) a ineficiência do Teorema Fundamental do Cálculo de Riemann; e (4) a classe $\mathcal{R}[a, b]$ das funções Riemann-integráveis não é o complemento de $\mathcal{C}[a, b]$. Estes aspectos não eram conhecidos ou não eram tidos como deficiências até que, quase 50 anos depois do texto *Über trigonometrische Reihe* de Riemann estar finalizado em 1852 e mais de 30 anos depois de sua publicação por Dedekind em 1867, os trabalhos de Lebesgue deram início a uma nova Teoria de Integração. Apenas uma nova integral fez com que se pudesse perceber claramente os vários problemas da anterior, muitos dos quais foram discutidos e solucionados pelo próprio Henri Lebesgue em seus textos.

2.6.1 Escassez de funções integráveis

Afirmamos que o conjunto $\mathcal{R}[a, b]$ é escasso em $\mathcal{F}([a, b]; \mathbb{R})$ no sentido de que existem classes enormes de funções que poderiam ser integradas com outras teorias (duas das quais abordaremos adiante) mas que não são Riemann-integráveis. Uma destas é a classe das funções tipo-Dirichlet que veremos nos próximos exemplos. Descobriremos como encontrar outra classe deste tipo no Exemplo 3.16 da Seção 3.7.2 do próximo capítulo. Além destas, qualquer função descontínua num conjunto que não é de medida nula (vide Teorema de Lebesgue) ou que é ilimitada (vide Teorema 2.3) está automaticamente fora de $\mathcal{R}[a, b]$. Ressaltamos que o Teorema 2.6 não só surte efeito sobre a quantidade de funções integráveis, mas também sob outros aspectos problemáticos. Voltaremos a utilizá-lo nas demais deficiências.

Um exemplo simples de função não integrável a Riemann é o seguinte:

Exemplo 2.6. (Função de Dirichlet) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{se } x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

²⁴Cf. Seção 2.4.1.

²⁵Basta notar que os pontos $x \in [0, 1] \setminus K$ pertencem aos intervalos removidos, os quais são abertos. Então estes pontos são interiores, o que significa que f é constante (e portanto contínua) numa vizinhança de cada ponto $x \in [0, 1] \setminus K$. Além disso, como K não contém intervalos, toda vizinhança de um ponto $x \in K$ contém pontos $x \in [0, 1] \setminus K$, isto é, f assume valor 0 e 1 em qualquer vizinhança de pontos $x \in K$.

A função assim obtida, denominada *Função de Dirichlet*, não é Riemann-integrável. Com efeito, basta notar que f é descontínua em todos os pontos de $[a, b]$, pois $[a, b] \setminus \mathbb{Q}$ e $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ são densos neste intervalo. Como $[a, b]$ não tem medida nula (veja o Exemplo 2.1), segue-se imediatamente do Teorema de Lebesgue que $f \notin \mathcal{R}[a, b]$.

Outro modo de demonstrar este fato é utilizando o Teorema de Darboux. De fato, temos $\bar{S}(P; f) = 1$ e $\underline{S}(f; P) = 0$, seja qual for a partição P deste intervalo. Daí,

$$\int_a^b f = \lim_{|P| \rightarrow 0} \bar{S}(P; f) = \lim_{|P| \rightarrow 0} 1 = 1 \neq 0 = \lim_{|P| \rightarrow 0} 0 = \lim_{|P| \rightarrow 0} \underline{S}(f; P) = \int_a^b f,$$

donde f não é integrável a Riemann. ♦

Podemos generalizar esta ideia e obter uma ampla classe de funções não integráveis. As definições são dadas no próximo exemplo.

Exemplo 2.7. (Funções tipo-Dirichlet) Seja $A \subset [a, b]$ denso em $[a, b]$ e com medida nula. Se $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas e $h(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in [a, b] \setminus A, \\ g(x) + h(x) & \text{se } x \in A. \end{cases}$$

Então $f \in \mathcal{D}[a, b]$, a classe de funções *tipo-Dirichlet* em $[a, b]$.²⁶ Mostremos que f é descontínua em todos os pontos do intervalo $[a, b]$.

Sabemos que a continuidade de f num ponto $c \in [a, b]$ equivale à afirmação de que $\lim f(x_n) = f(c)$, ou melhor, $\lim[f(x_n) - f(c)] = 0$, seja qual for a sequência (x_n) de pontos em $[a, b]$ que converge para c (veja a Proposição 1.12 no Capítulo 1). Ora, como A tem medida nula, não pode conter intervalos. Daí, $[a, b] \setminus A$ também deve ser denso em $[a, b]$. Assim, tomando $c \in A$, não é difícil conseguir uma sequência (x_n) de pontos em $[a, b] \setminus A$ que converge para c . Neste caso,

$$\lim[f(x_n) - f(c)] = \lim[g(x_n) - g(c) - h(c)] = -h(c) \neq 0$$

e, portanto, f é descontínua em c . Por conseguinte, é descontínua em A . Analogamente, tomando $c \in [a, b] \setminus A$, basta conseguir uma sequência (y_n) de pontos em A que converge para c e notar que $\lim[f(y_n) - f(c)] \neq 0$, donde f é descontínua em c . Consequentemente, f é descontínua em $[a, b] \setminus A$. Ou seja, f é descontínua em todo o intervalo $[a, b]$. Pelo Teorema de Lebesgue, $f \notin \mathcal{R}[a, b]$. ♦

A classe tipo-Dirichlet pode ser ampliada se considerarmos funções com domínio num compacto (não-degenerado) qualquer. Nos restringimos ao caso $[a, b]$ pelo fato de estarmos interessados em desenvolver as teorias de integração apenas em intervalos compactos.

Os Exemplos 2.6 e 2.7 não foram dados à toa. Como veremos no próximo capítulo, o conjunto das funções Lebesgue-integráveis contera toda a classe $\mathcal{D}[a, b]$. E o melhor, de uma maneira muito trivial. A integral de Lebesgue da função de Dirichlet, por exemplo, é trivialmente igual a 0.²⁷

Outro fator que restringe a classe das funções Riemann-integráveis é a possibilidade de materializar o Teorema 2.3. A definição permite o argumento utilizado, de modo que a integral de Riemann se limita a funções limitadas. Consequentemente, funções como

²⁶ Observe que obtemos a função de Dirichlet do Exemplo 2.6 tomando, para todo $x \in [a, b]$, $g(x) = 0$ (função identicamente nula) e $h(x) = 1$ (função constante e igual a 1).

²⁷ Cf. Exemplo 3.6 do próximo capítulo.

$f(x) = 1/\sqrt{x}$ se $x \in (0, 1]$ e $f(0) = 0$ não pertencem à classe das funções integráveis. Para integrá-la de alguma forma precisamos do conceito de integral imprópria, o que deixará de ser necessário ao introduzirmos as próximas integrais, onde a restrição da limitação da função a ser integrada desaparece. Nestas integrais, portanto, f pode ser integrada *propriamente*.

Veremos adiante²⁸ uma forma de aumentar a classe das funções Riemann integráveis e remediar em parte a deficiência descrita nesta seção. O procedimento de extensão se baseará no conceito de *funções equivalentes*. Estenderemos a classe $\mathcal{R}[a, b]$ de modo a abarcar, sem muito esforço, todo o conjunto $\mathcal{D}[a, b]$. Porém, mesmo que os problemas apresentados nos Exemplos 2.6 e 2.7 sejam resolvidos, o problema geral da escassez é muito maior²⁹, de modo que ainda continua louvável a introdução de teorias de integração que gerem classes mais amplas de funções integráveis.

2.6.2 Limitações operacionais

A integral de Riemann também possui deficiências do ponto de vista operativo envolvendo séries e sequências de funções. Nesta seção, examinaremos em particular a validade da operação

$$\lim \int_a^b f_n = \int_a^b \lim f_n = \int_a^b f, \quad (2.31)$$

onde a sequência de funções integráveis (f_n) converge para uma função f em $[a, b]$. Esta operação chama-se *passagem do limite sob a integral*, *inversão do limite sob a integral* ou ainda *integração termo-a-termo*, e têm grande importância do ponto de vista prático.

Na integração de Riemann, para realizarmos a operação (2.31) geralmente³⁰ exige-se a convergência uniforme da sequência (f_n) . Este é o ponto em que a deficiência ocorre, pois a condição uniforme da convergência é demasiadamente restritiva. Sem esta hipótese, três coisas podem dar errado:

- (1) Pode não existir $\lim \int_a^b f_n$;
- (2) Mesmo que o limite exista, f pode não ser integrável a Riemann, o que faz $\int_a^b f$ não ter sentido;
- (3) Mesmo que o limite exista e f seja integrável, pode ocorrer de $\lim \int_a^b f_n \neq \int_a^b f$.

Vejamos exemplos de cada um dos casos.

Exemplo 2.8. Para ilustrar o primeiro, basta considerar a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq 1/n, \\ 1/x & \text{se } 1/n < x \leq 1. \end{cases}$$

Daí, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^{1/n} 0 dx + \int_{1/n}^1 \frac{1}{x} dx = \ln(x) \Big|_{1/n}^1 = \ln(1) - \ln(1/n) = -\ln(1/n).$$

²⁸Cf. Seção 3.7.1.

²⁹Cf. Seção 3.7.2.

³⁰O Teorema de Arzelà que veremos adiante estipula condições menos restritivas para realizar esta operação sob a integral de Riemann. Porém, por ter uma demonstração relativamente trabalhosa, geralmente não é exibido em cursos introdutórios de Análise.

Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [-\ln(1/n)] = +\infty$. $\blacklozenge$

Exemplo 2.9. Para o segundo caso, tomemos uma enumeração $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ dos racionais no intervalo $[a, b]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = r_k, \text{ para algum } k \in \{1, 2, \dots, n\}, \\ 0 & \text{nos demais pontos.} \end{cases}$$

Então cada f_n é não nula em apenas uma quantidade finita de pontos³¹, donde é integrável e $\int_a^b f_n = 0$. Por outro lado, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ é a função de Dirichlet que, como vimos no Exemplo 2.6, não é integrável. Neste caso, $\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ não tem sentido. $\blacklozenge$

Exemplo 2.10. Por fim, para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = (n+1)x^n$ se $0 \leq x < 1$ e $f_n(1) = 0$. Se fixarmos $x \in [0, 1)$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, fizermos $a_n = (n+1)x^n$, teremos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1}x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x + \frac{x}{n+1} \right) = x < 1.$$

Logo, pelo Teste da Razão, a série $\sum a_n$ converge e, portanto, seu termo geral $a_n = (n+1)x^n$ tem limite 0. Ou seja,

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)x^n = 0. \quad (2.32)$$

Por outro lado,

$$x = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0. \quad (2.33)$$

Assim, de (2.32) e (2.33), vemos que $f \rightarrow 0$ simplesmente em $[0, 1]$. Contudo,

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 (n+1)x^n = x^{n+1} \Big|_0^1 = 1,$$

donde $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq 0 = \int_0^1 0 = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$. $\blacklozenge$

O primeiro e o terceiro caso não são resolvidos por generalizações da integral de Riemann. De fato, dizemos que uma integral *generaliza* outra quando **expande** a classe das funções integráveis e **mantém** as funções que já podiam ser integradas com as mesmas integrais. Se pudermos dar um valor a $\int_a^b f_n$ sob a integral de Riemann, o mesmo valor ocorrerá na integral que a generalizar, ou seja, a sequência de números reais $(\int_a^b f_n)$ será mantida a mesma. Se divergir na primeira integral, divergirá em qualquer generalização.

Já no terceiro caso, o Exemplo 2.10 servirá como contraexemplo para a passagem do limite sob a integral no sentido de Lebesgue³². Porém, o ganho que se tem com este exemplo é que ele dá indícios de quais seriam as condições suficientes para realizar a operação (2.31) na integral de Lebesgue, exigências estas que são muito menos restritivas do que convergência uniforme. É nestas condições que se apoiam os importantes *Teoremas de Convergência* que veremos no próximo capítulo, os quais não são válidos para a integral de Riemann.³³

Por fim, o problema do Exemplo 2.9 não ocorre com a integral de Lebesgue. De fato, como já comentamos, a integral da função de Dirichlet no sentido de Lebesgue é 0, e a integral de cada uma das funções da sequência (f_n) também é 0. Assim, vale a inversão. Como veremos adiante, a sequência (f_n) cumpre as condições dos *teoremas de convergência* da integral de Lebesgue, os quais garantem a inversão.

³¹É, portanto, seccionalmente contínua.

³²Cf. Exemplo 3.13 do Capítulo 3.

³³Existem, porém, versões enfraquecidas destes teoremas para a integral de Riemann, como por exemplo o Teorema de Arzelà (cf. Corolário 3.10).

2.6.3 Ineficiência do Teorema Fundamental do Cálculo de Riemann

Nesta seção, examinaremos a validade do Teorema Fundamental do Cálculo pela abordagem da integral de Riemann.

Sejam dadas funções $F, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Para podermos afirmar

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f, \quad (2.34)$$

de quais hipóteses adicionais precisamos? Como vimos no Teorema 2.5, em Riemann, é necessário supor que F' é integrável. Ora, uma situação de função não integrável são funções ilimitadas. Assim, invalidamos a relação (2.34) sempre que tivermos F' ilimitada. Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.11. Considere a função $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida da seguinte forma:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x^2}\right) & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Então F é diferenciável em todo o intervalo $[0, 1]$, porém, a função $f = F'$ é ilimitada. ♦

No entanto, mesmo admitindo que $f = F'$ é limitada, a relação (2.34) pode não fazer sentido se f não for integrável. E, de fato, existem derivadas limitadas mas não integráveis. Exemplificaremos este fato com a *função de Volterra*, idealizada pelo matemático italiano Vito Volterra (1860-1940) no artigo *Sui principii del calcolo integrale* de 1881, o qual posteriormente exerceu forte influência sobre os trabalhos de Cantor em seus conjuntos.

Exemplo 2.12. (Função de Volterra) Seja E o conjunto de Cantor generalizado no intervalo $[0, 1]$. Pelo que vimos na Seção 2.4.2, E não tem medida nula. Para cada intervalo (a, b) removido na construção de E , vamos definir a função $f_a : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(a) = 0$ e, se $x \neq a$,

$$f_a(x) = (x - a)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{1 - a}\right).$$

Vemos que f é diferenciável em $[a, b]$. Derivando esta expressão, obtemos

$$f'_a(x) = 2(x - a) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{1 - a}\right) - \cos\left(\frac{1}{1 - a}\right),$$

a qual se anula em infinitos pontos do intervalo (a, b) . Considerando o número c tal que

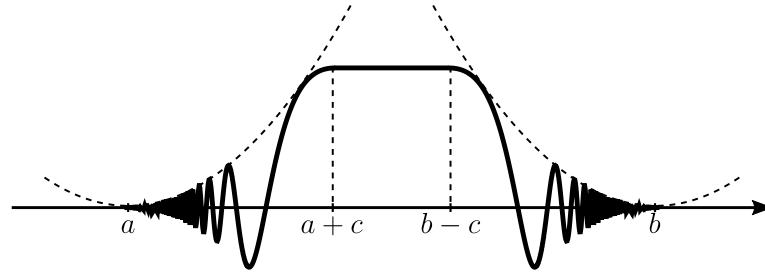
$$a + c = \sup\{x \in \mathbb{R}; a < x \leq \frac{a + b}{2}, f'_a(x) = 0\},$$

temos $f'_a(a + c) = 0$.³⁴ Vamos agora definir uma função F cuja derivada é limitada porém não-integrável.

Seja $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = 0$ se $x \in E$ e, para cada intervalo (a, b) removido de $[0, 1]$ na construção de E (veja a Figura 2.12),

$$F(x) = \begin{cases} f_a(x) & \text{se } a \leq x < a + c, \\ f_a(a + c) & \text{se } a + c \leq x \leq b - c, \\ -f_b(x) & \text{se } b - c < x \leq b. \end{cases}$$

Figura 2.12: Gráfico da função de Volterra no intervalo $[a, b]$ tal que (a, b) foi removido.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A função F definida acima denomina-se *função de Volterra*. Observe que F é derivável em todos os pontos de $[a, b]$.

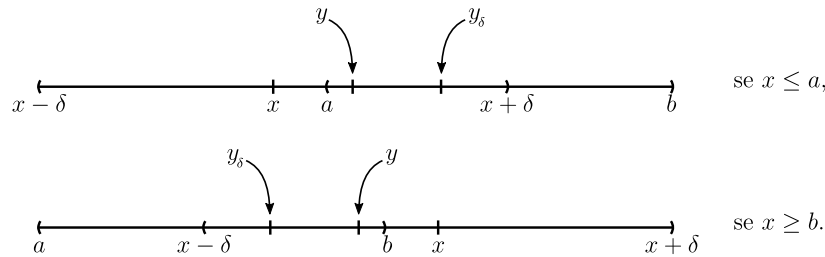
Afirmamos que F' é limitada. De fato, F' se anula em todos os pontos de E e, para cada intervalo (a, b) removido, (observe que $x \sin(1/x) \leq 1$)

$$\begin{aligned} |F'(x)| &= |f'_a(x)| = \left| 2(x-a) \sin\left(\frac{1}{x-a}\right) - \cos\left(\frac{1}{x-a}\right) \right| \leq \\ &\leq \left| 2(x-a) \sin\left(\frac{1}{x-a}\right) \right| + \left| \cos\left(\frac{1}{x-a}\right) \right| \leq 2 + 1 = 3, \text{ se } x \in [a, a+c], \end{aligned}$$

$F'(x) = 0$ se $x \in [a+c, a-c]$ e, analogamente ao que foi feito acima, $|F'(x)| = |-f'_b(x)| = |f'_b(x)| \leq 3$ se $x \in (b-c, b]$.

Por fim, afirmamos que F' não é integrável. Com efeito, fixando $x \in E$, temos $F'(x) = 0$.³⁵ Por outro lado, existem pontos $y \notin E$ arbitrariamente próximos de x

Figura 2.13: Casos em que se obtém $y \notin E$ próximo de $x \in E$ tal que $|F'(y)| = 1$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

tais que $|F'(y)| = 1$. De fato, para qualquer $\delta > 0$, como E não contém intervalos, existe $y_\delta \in (x-\delta, x+\delta) \setminus E$. Consequentemente, $y_\delta \in (a, b)$ para algum dos intervalos (a, b) removidos na construção de E (veja a Figura 2.13). Se $x \leq a$, podemos encontrar $y \in (a, b) \cap (x-\delta, x+\delta)$ suficientemente próximo de a (ou seja, $\leq a+c$) tal que $\sin(\frac{1}{y-a}) = 0$ e $\cos(\frac{1}{y-a}) = \pm 1$, donde $|F'(y)| = |f'_a(y)| = |\pm 1| = 1$. Se, porém, $x \geq b$, podemos

³⁴Isto ocorre porque o conjunto dos pontos críticos de uma função de classe C^1 é fechado. Veja Lima (2013b, p. 294, Exercício 11 item i).

³⁵Para ver isto, basta usar a definição de F' e o fato de que $y \sin(1/y) \rightarrow 0$ se $y \rightarrow 0$.

encontrar $y \in (a, b) \cap (x - \delta, x + \delta)$ suficientemente próximo de b (ou seja, $\geq b - c$) tal que $\sin(\frac{1}{y-b}) = 0$ e $\cos(\frac{1}{y-b}) = \pm 1$, donde $|F'(y)| = |-f'_a(y)| = |f'_a(y)| = |\pm 1| = 1$ novamente. Concluimos que F' não pode ser contínua em ponto algum de E , o qual não tem medida nula. Pelo Teorema 2.6, F' não é integrável. $\blacklozenge$

Desde que Newton e Leibniz introduziram as primeiras versões do TFC, busca-se definir rigorosamente uma integral na qual pudéssemos aferir a relação (2.34) sem hipóteses adicionais, como era feito com a integral de Newton. A integral que desenvolveremos no próximo capítulo resolve o problema dado pelo Exemplo 2.12. Nesta, a hipótese de que F' é limitada é suficiente. Contudo, o Exemplo 2.11 permanece como uma deficiência, que só será resolvida com a integral tratada no Capítulo 4, a qual resgatará finalmente todo o potencial que a integral de Newton possui em integrar derivadas.

2.6.4 A classe $\mathcal{R}[a, b]$ não é o completamento de $\mathcal{C}[a, b]$

O conjunto $\mathcal{C}[a, b]$ de todas as funções reais contínuas definidas em $[a, b]$ é uma das mais importantes classes de funções. Por este motivo, é de suma importância estudar como este conjunto se comporta sob as várias perspectivas teóricas, analisando, por exemplo, o que acontece se nele introduzirmos métricas e normas de interesse às mais variadas teorias. Uma importante métrica para o estudo dos espaços L^p é a chamada *métrica- L^p* . Veja, por exemplo, Benedetto e Czaja (2009) e, em especial, Cohn (2013). Estes espaços têm grande importância em teorias como Probabilidade³⁶ e Cálculo de Variações.³⁷ A métrica que analisaremos nesta seção será, quando estivermos no contexto da integral de Lebesgue (Capítulo 3), denominada *métrica- L^1* . Para abordar a última e mais importante deficiência, avaliaremos o espaço $\mathcal{C}[a, b]$ sob a versão desta métrica definida através da integral de Riemann.

Seja $d : \mathcal{C}[a, b] \times \mathcal{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d(f, g) = \int_a^b |f - g|.$$

Então d é uma métrica para $\mathcal{C}[a, b]$. Levantamos a seguinte questão: será que o espaço métrico $(\mathcal{C}[a, b], d)$ é completo? A resposta é negativa.

Exemplo 2.13. Seja $f_1 = 0$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$, seja $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por (Figura 2.14)

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2 - 1/n, \\ (n/2)x - n/4 + 1/2 & \text{se } 1/2 - 1/n \leq x \leq 1/2 + 1/n, \\ 1 & \text{se } 1/2 + 1/n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

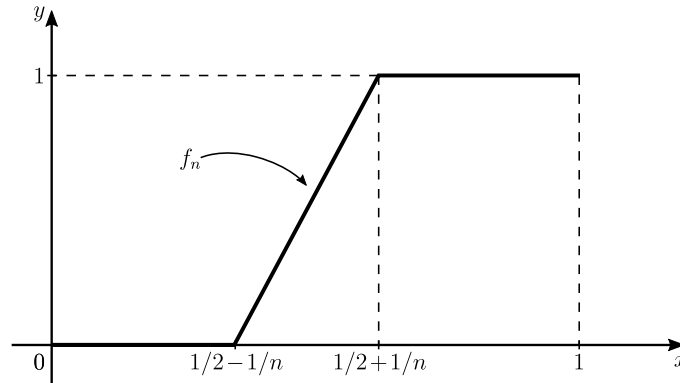
Então (f_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{C}[0, 1]$. Contudo, esta sequência converge sob a métrica d para a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ (i.e., $\int_a^b |f_n - f| \rightarrow 0$), onde f é definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2, \\ 1 & \text{se } 1/2 \leq x \leq 1, \\ 1/2 & \text{se } x = 1/2, \end{cases}$$

a qual é descontínua no ponto $x = 1/2$. Ou seja, (f_n) é uma sequência de Cauchy em $(\mathcal{C}[a, b], d)$ que não é convergente. $\blacklozenge$

³⁶Cf. Koralov e Sinai (2007).

³⁷Cf. Fonseca e Leoni (2007).

Figura 2.14: Gráfico da n -ésima função da sequência (f_n) 

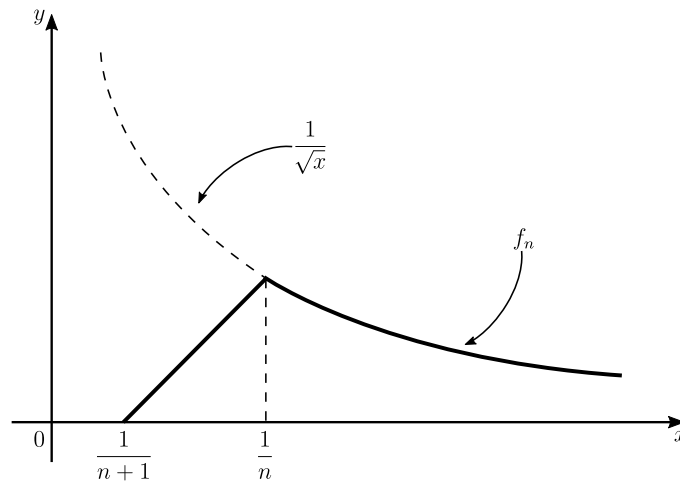
Fonte: Elaborada pelo autor.

O exemplo acima mostra que $\mathcal{C}[a, b]$ não é completo com a métrica d . Uma questão importante de se indagar é: qual seria o “completamento” deste espaço? Ou seja, onde residiria os limites de sequências contínuas que são de Cauchy sob a métrica d ? Um grave deficiência da integral de Riemann é que $\mathcal{R}[a, b]$ não é este conjunto. É isto que nos mostra o próximo exemplo.

Exemplo 2.14. Consideremos o intervalo real $[0, 1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, vamos definir g_n por:

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq 1/(n+1), \\ n^{3/2}[(n+1)x - 1] & \text{se } 1/(n+1) \leq x \leq 1/n, \\ 1/\sqrt{x} & \text{se } 1/n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Então, mais uma vez, (g_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{C}[0, 1]$, a qual não é convergente

Figura 2.15: Gráfico da n -ésima função da sequência (g_n) e tracejado de seu limite.

Fonte: Elaborada pelo autor.

se d for definida com a integral de Riemann.³⁸



A deficiência que acabamos de apresentar, presente na integral de Riemann mas que se estende também à integral de Riemann-Stieltjes, é a mais danosa à esta teoria de integração, e tem consequências tão sérias quanto aquelas resultantes de tentar desenvolver a Análise Matemática sem o Axioma de Completude da reta (CHAE, 1995, p. 48). Isto justifica a necessidade de se desenvolver uma nova integral. Como veremos no próximo capítulo, a métrica d definida acima tem suporte total pela integral de Lebesgue. Construiremos um novo espaço de funções (o *espaço* L^1) que é o complemento de $\mathcal{C}[a, b]$ e que é, ele mesmo, completo sob d (a *métrica*- L^1).

³⁸Neste caso, $d\text{-}\lim g_n = g$, onde $g(x) = 1/\sqrt{x}$ se $x \in (0, 1]$ e $g(0) = 0$. Assim, não podemos avaliar as integrais $\int_a^b |g_n - g|$, pois não existem no sentido de Riemann.

3

Integral de Lebesgue-Riesz

A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original
– Albert Einstein

Figura 3.1: Henri Léon Lebesgue (1875-1941) e Frigyes Riesz (1880-1956).



Fonte: Domínio Público.¹

O ano de 1901 marca o início de uma revolução na Matemática. Meio século se passou desde as descobertas de Riemann e, até então, não se vislumbrava mudanças essencialmente significativas na teoria da integração. Em seu pequeno (porém famoso) paper *Sur une généralisation de l'intégrale définie* publicado em 1901, o matemático francês Henri Lebesgue (1875-1941) deu início a uma completa mudança de ideias. Neste trabalho, Lebesgue introduziu o conceito de conjunto *mensurável* e discutiu uma nova ideia de integrar, particionando a imagem ao invés do domínio², algo que era feito até então no método de Cauchy-Riemann. Sua tese de doutorado, intitulada *Intégrale, longueur, aire* e publicada em 1902, foi decisiva para o desenvolvimento da Matemática do Século XX em diante. Neste trabalho, Lebesgue desenvolveu detalhadamente um conceito de integral completamente novo, que generaliza a integral de Riemann e eleva o conceito de integração a um novo patamar. Em relação às funções a serem integradas, desaparecem restrições tais

¹Imagens ordenadamente disponíveis em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lebesgue_2.jpeg e https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Frigyes_Riesz.jpeg. Acesso em: 19 Out. 2015.

²Cf. Medeiros e Mello (2008, p. 151-155).

como limitação e nulidade da medida do conjunto dos pontos de descontinuidade. Mais que isso, Lebesgue ampliou vastamente uma importante área de estudos, hoje conhecida como *Teoria da Medida*, de valor inestimável para diversas ciências na qual é aplicada.

Com uma nova teoria da integração foi possível perceber com clareza os vários problemas da anterior, muitos dos quais foram discutidos e solucionados pelo próprio Lebesgue em seus textos³. Discutimos estes problemas na Seção 2.6 do capítulo anterior. Em seu famoso livro *Leçons sur l'Intégration et la Recherche des Fonctions Primitives* de 1904, dentre outros importantes resultados, Lebesgue apresenta os *teoremas de convergência*, que minimizam as condições necessárias para realizar a integração termo-a-termo de sequência de funções.⁴ Outro resultado importante que veremos, conhecido como *Teorema de Riesz-Fischer*, resolve o problema do completamento de $\mathcal{C}[a, b]$ (Seção 3.7).

Inicialmente as ideias de Lebesgue foram rejeitadas, consideradas “ousadas de mais” por alguns matemáticos da época.⁵ Contudo, aos poucos percebeu-se a grandiosidade do novo conceito. Hoje, a integral introduzida por Lebesgue é padrão em teorias como Probabilidade, Mecânica Quântica, dentre muitas outras. A *integral de Lebesgue*, como ficou conhecida, foi a primeira a realmente generalizar o conceito de integração, visto que é aplicável a conjuntos cujos elementos podem ser muito diferentes de números ou n-uplas de números. Este é um de seus maiores triunfos. Por este motivo, alguns teóricos consideram que a *Teoria da Integração* iniciou-se no Século XX.⁶ Outro aspecto triunfante da integração de Lebesgue é o fato de que esta teoria fornece respostas definitivas para a *análise de Fourier*.⁷

A integral de Lebesgue passou cada vez mais a ser imprescindível para o desenvolvimento de várias áreas científicas. As principais aplicações requerem que esta teoria seja desenvolvida com todo o seu poder, ou seja, tendo como base uma teoria da medida. Uma pergunta surge naturalmente: dada a importância destas ideias, seria possível implementá-las em um nível de graduação? Como aumentar o apelo geométrico ou intuitivo da teoria, de modo a torná-la mais palpável? O alto nível de abstração sempre foi um ponto criticado da teoria da integração de Lebesgue. A verdade é que a completa mudança de ideias pode gerar dificuldades pelo estudante nos primeiros contatos. Assim, um problema persistente consiste em buscar alternativas para amenizar esta passagem à abstração com uma abordagem mais próxima do habitual.

Em 1920, o matemático húngaro Frigyes (Frédéric ou Friedrich) Riesz (1880-1956) publicou o artigo *Sur l'intégrale de lebesgue* onde introduzia uma nova abordagem para o desenvolvimento da integral de Lebesgue baseada em sequências de funções degrau. É comum referir-se à integral produzida na perspectiva de Riesz por *integral de Lebesgue-Riesz*. Este método possui várias vantagens em relação ao tradicional de Lebesgue, tanto teóricas quanto pedagógicas, algumas das quais discutiremos agora.

Primeiramente, o método de Riesz é de modo mais explícito, mais direto, uma generalização das integrais de Cauchy, Riemann e Darboux que vimos no capítulo anterior. A ideia de construção não foge muito das ideias canônicas, permitindo que o estudante

³Lebesgue descobriu muitas das principais consequências de sua teoria, dentre as quais estão os teoremas da convergência dominada e monótona, a teoria das funções de Lebesgue no conjunto de cantor ternário e a teoria Lebesguiana da diferenciação de integrais indefinidas (cf. JONES, 2001, ix).

⁴Cf. Seções 3.5 e 3.6 adiante.

⁵Um dos principais motivos foi porque as funções descontínuas e as funções sem derivada eram consideradas monstruosidades, e eram justamente estas funções que desempenhavam um importante papel nas considerações de Lebesgue.

⁶Medeiros e Mello, 2008, p. 2.

⁷Cf. Jones (2001, passim).

alcance a generalidade da integral de Lebesgue sem perder a noção de integração que já possui desde as integrais do cálculo. Outra vantagem do ponto de vista pedagógico consiste em motivar a utilização dos conceitos de *quase sempre* (ou *quase em todo ponto*), importantes nos mais diversos campos de estudo da Análise.

Além disso, com a abordagem de Riesz é possível obter os principais resultados concernentes à integral de Lebesgue e, com eles, resolver quase todos os problemas atrelados à integral de Riemann que levantamos na Seção 2.6.2 do capítulo anterior. De fato, as definições da integral de Lebesgue-Riesz foram, podemos dizer, “modeladas” de modo a se obter os teoremas de convergência, isto é, obter condições menos restritivas para permitir a integração termo-a-termo de uma sequência de funções. Um aspecto triunfante do método de Riesz consiste na possibilidade de resolver sem dificuldade o tão importante problema da completude levantado no capítulo precedente, Seção 2.6.4. Obteremos adiante o espaço métrico completo L^1 das funções Lebesgue-Riesz-integráveis munido com a métrica- L^1 que já comentamos. E o melhor: tudo isso é feito sem a necessidade de uma teoria da medida⁸. Na realidade, outro ponto positivo neste método é justamente poder utilizá-lo de modo a desenvolver a teoria da medida. De fato, embora não nos ocupemos destes temas, a abordagem de Riesz pode ser aplicada em contextos mais gerais de modo a se obter os importantes *espaços L^p* , as *medidas de Radon*⁹ ou a própria *medida de Lebesgue*¹⁰. Assim, após a integral de Lebesgue-Riesz, o aluno tem algumas possibilidades e opções de teorias de medida e integração para avançar com seus estudos.

Neste capítulo, descreveremos a integral de Lebesgue pelo método proposto por Riesz. Evitaremos escrever “integral de Lebesgue-Riesz”. Por simplicidade, daremos preferência à denominação “integral de Lebesgue” quando for necessário identificar a integral e, em geral, chamaremos esta integral simplesmente de “integral”. Desta forma, em todo este capítulo, “integral” denotará a “integral de Lebesgue-Riesz”. O mesmo símbolo utilizado para a integral de Riemann será utilizado para esta nova integral, isto é, um novo sentido será dado ao símbolo $\int$ que utilizamos no capítulo anterior. Quando precisarmos retomar a integral de Riemann, seja para efeito de comparação ou para traçar qualquer tipo de comentário, deixaremos explícito utilizando a terminologia “integral de Riemann” e o símbolo $\int_R$. Os mesmos comentários valem para as integrais superior e inferior de Darboux. Estabeleceremos estas notações e convenções na Seção 3.3 adiante.

3.1 Integrando funções degrau

O desenvolvimento da integral de Lebesgue-Riesz é feito por etapas. A primeira consiste em definir a integral de uma maneira muito natural sobre funções do tipo degrau. A partir de resultados concernentes a esta espécie de função, poderemos obter classes maiores de funções integráveis. Assim, o primeiro passo é definir a integral de funções degrau.

Uma função $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada *função degrau* (Figura 3.2) se existe uma partição $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ de $[a, b]$, denominada *partição associada* a φ , tal que φ é constante em cada subintervalo aberto $I_k = (x_{k-1}, x_k)$.

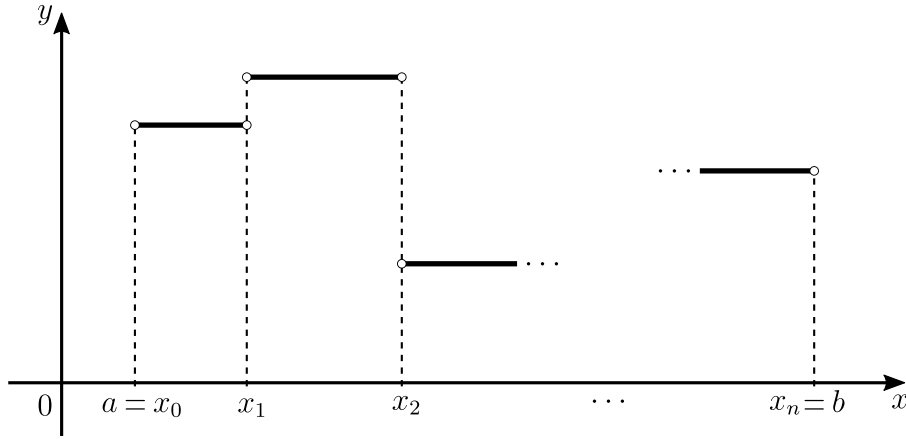
⁸O único conceito que precisamos neste sentido é o de *medida nula* em $\mathbb{R}$, o qual é altamente acessível e visto até mesmo em cursos introdutórios de análise real. Abordamos este conceito na Seção 2.4 do capítulo anterior.

⁹Cf. Roselli (2001, p. 636).

¹⁰Na Seção 3.4.1 adiante, traçaremos alguns comentários de como se obtém o conceito de *conjunto mensurável* através da integral de Lebesgue-Riesz que desenvolveremos.

Para nós não será importante o valor que uma função degrau assume nos pontos de sua partição associada. Como veremos, estes pontos não influenciarão na primeira definição de integral. Além do mais, toda partição tem medida nula e, com veremos adiante, nossa definição de integral permitirá omitir conjuntos deste tipo.¹¹

Figura 3.2: Gráfico de uma função degrau genérica.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos tornar melhor a notação das funções degrau definidas acima. Dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ arbitrário, a *função característica* $\mathcal{X}_A$ de A é definida por

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Exemplo 3.1. A função de Dirichlet apresentada no Exemplo 2.6 do capítulo anterior é a função característica dos racionais no intervalo $[0, 1]$. O mesmo vale para a função definida no Exemplo 2.5, a qual é a função característica do conjunto de cantor ternário neste mesmo intervalo. ♦

Sejam $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função degrau, $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ uma partição associada a φ e $I_k = (x_{k-1}, x_k)$. Pondo $\varphi(x) = a_k$, se $x \in I_k$, com $k = 1, 2, \dots, n$, a função degrau φ pode ser escrita como

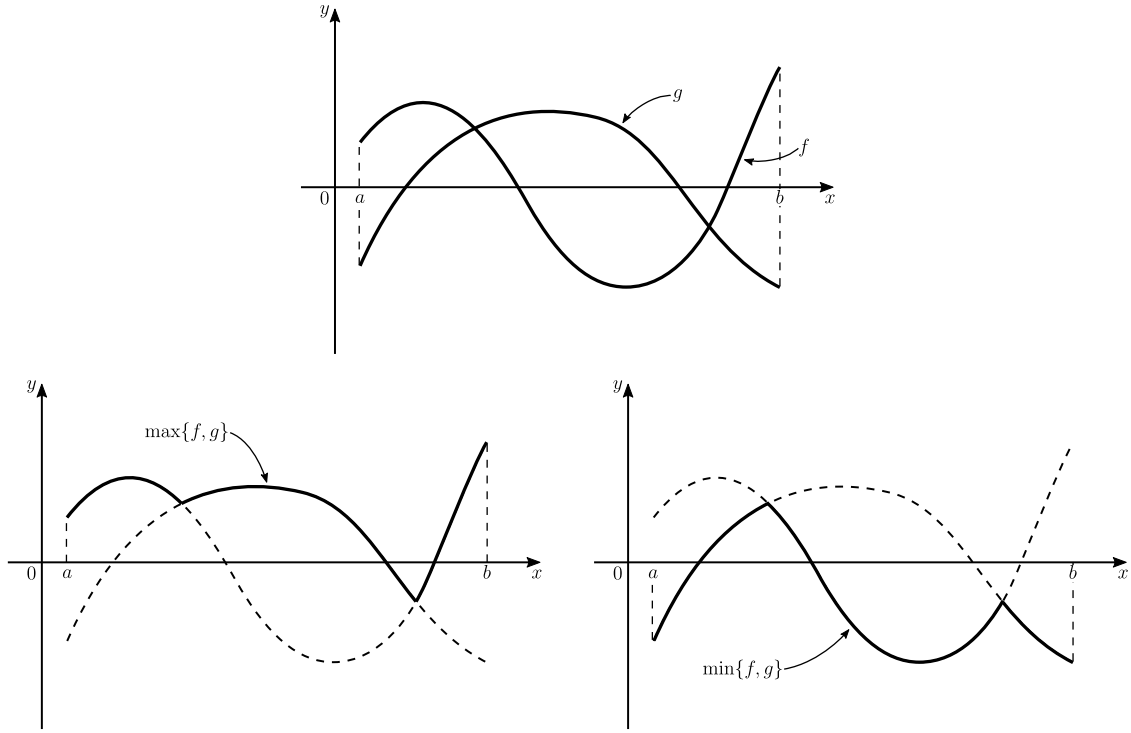
$$\varphi = \sum_{k=1}^n a_k \mathcal{X}_{I_k}.$$

Dado um conjunto $\{a, b\}$ formado por dois elementos, é imediato que

$$\max\{a, b\} = \frac{1}{2}[(a + b) + |a - b|] \quad \text{e} \quad \min\{a, b\} = \frac{1}{2}[(a + b) - |a - b|].$$

Além disso, estes números são únicos. Aplicando isto a duas funções $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ quaisquer, para cada $x \in X$, temos

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x)) + |f(x) - g(x)|,$$

Figura 3.3: Gráficos de f , $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$, respectivamente.

Fonte: Elaborada pelo autor.

e

$$\min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x)) - |f(x) - g(x)|.$$

Assim, cada uma das funções $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ (denominadas *função máximo* e *função mínimo* entre f e g), dadas pelas expressões acima, está bem definida e tem domínio X (Figura 3.3).

Para cada função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, definimos a *parte positiva* e a *parte negativa* de f respectivamente por

$$f^+ = \max\{f, 0\} \quad \text{e} \quad f^- = \max\{-f, 0\},$$

onde 0 é a função identicamente nula. Assim, f^+ e f^- são funções bem definidas (Figura 3.4), têm domínio X e são válidas as igualdades

$$f = f^+ - f^- \quad \text{e} \quad |f| = f^+ + f^-,$$

donde

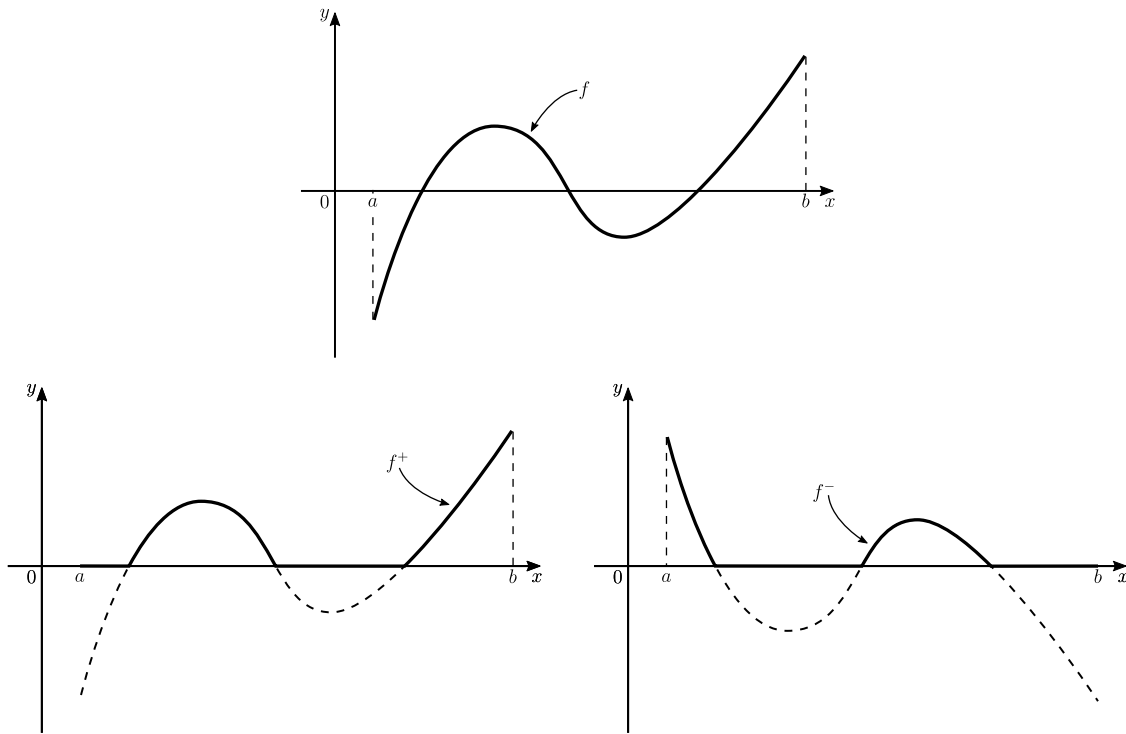
$$f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f) \quad \text{e} \quad f^- = \frac{1}{2}(|f| - f).$$

A proposição seguinte decorre diretamente da definição de função degrau.

Proposição 3.1. *Sejam $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções degrau e $c \in \mathbb{R}$. Então*

$$c\varphi, \varphi + \psi, \varphi\psi, |\varphi|, \max\{\varphi, \psi\}, \min\{\varphi, \psi\}, \varphi^+ \text{ e } \varphi^-$$

¹¹Em geral, toda a teoria da integração, tanto de Lebesgue quanto de Riesz, é desenvolvida a menos de conjuntos de medida nula. Estes conjuntos são, por assim dizer, “negligenciáveis”.

Figura 3.4: Gráficos de f , f^+ e f^- , respectivamente.

Fonte: Elaborada pelo autor.

também são funções degrau. Além disso, se ψ for não nula (exceto nos pontos da partição associada P), então φ/ψ também é uma função degrau (cujos valores nos pontos de P podem ser atribuídos arbitrariamente).

Estamos aptos a definir nossa primeira noção de integral, aplicada às funções degrau. Seja $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela expressão

$$\varphi = \sum_{k=1}^n a_k \mathcal{X}_{I_k},$$

onde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ e $I_k = (x_{k-1}, x_k)$, para $k = 1, 2, \dots, n$. Definimos a *integral* de φ em $[a, b]$ por

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \sum_{k=1}^n a_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n a_k \text{amp}(I_k).$$

Por simplicidade escreveremos apenas $\int_a^b \varphi$. Assim, se φ é não-negativa, sua integral pode ser interpretada como a área entre seu gráfico e o eixo dos x (Figura 3.5).¹²

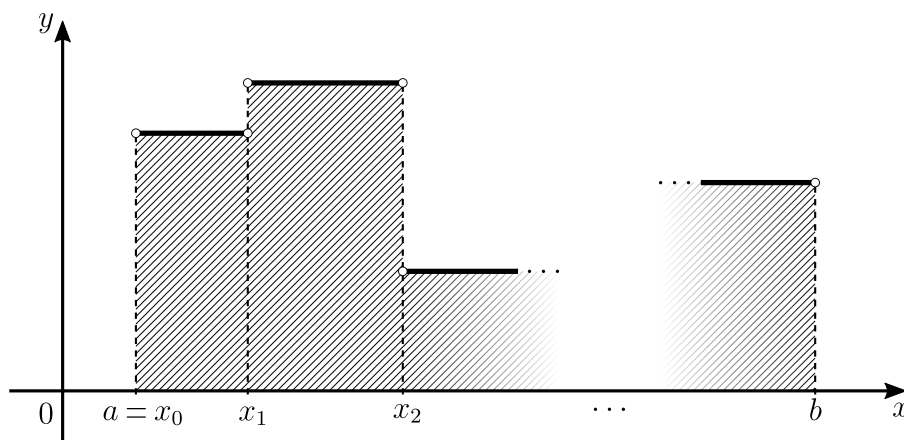
Segue imediatamente da definição a

Proposição 3.2. Dadas $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções degrau e dado $r \in \mathbb{R}$, temos:

- (a) Se $c \in (a, b)$, então $\int_a^b \varphi = \int_a^c \varphi + \int_c^b \varphi$;

¹²Note que esta definição coincide com a integral de Riemann para uma função degrau.

Figura 3.5: Interpretação geométrica da integral de uma função degrau.



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$(b) \int_a^b [\varphi + \psi] = \int_a^b \varphi + \int_a^b \psi;$$

$$(c) \int_a^b r\varphi = r \int_a^b \varphi;$$

$$(d) \text{ Se } \varphi \geq 0, \text{ então } \int_a^b \varphi \geq 0.$$

O corolário abaixo decorre do item (d) da proposição anterior.

Corolário 3.1. *Sejam $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções degrau. Então:*

$$(a) \text{ Se } \varphi \leq \psi, \text{ então } \int_a^b \varphi \leq \int_a^b \psi;$$

$$(b) |\int_a^b \varphi| \leq \int_a^b |\varphi|;$$

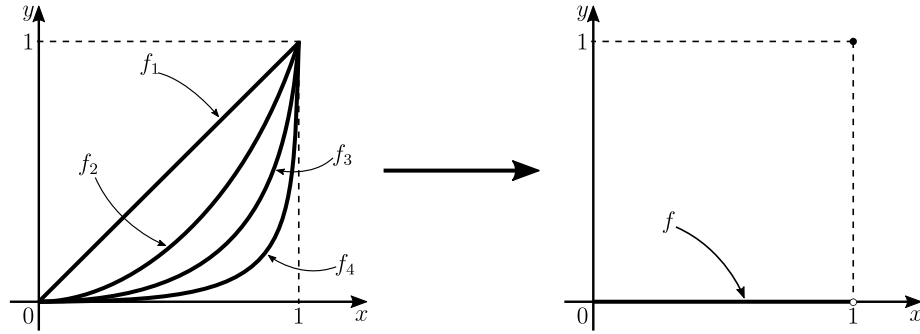
$$(c) \int_a^b \varphi^+ \leq \int_a^b |\varphi|;$$

$$(d) \int_a^b \varphi^- \leq \int_a^b |\varphi|.$$

3.2 Lemas fundamentais

A definição da integral de Lebesgue-Riesz se apoia em dois fatos, dois lemas, os quais garantirão a existência e a unicidade da integral. Assim, dado o papel fundamental que estes resultados desempenham em nossas considerações, os chamaremos de *Lemas Fundamentais*. Antes de enunciá-los e demonstrá-los, precisamos estabelecer alguns conceitos novos, os quais serão úteis durante todo o trabalho.

Dizemos que uma determinada função ou sequência de funções definidas em X satisfaz uma propriedade *quase sempre* (também usaremos a notação *q.s*) quando existe um conjunto de medida nula N tal que esta função ou sequência de funções verifica a propriedade para todo $x \in X \setminus N$. Essas propriedades podem ser relacionadas à convergência, igualdade, etc., como veremos nos próximos exemplos.

Figura 3.6: Gráfico das quatro primeiras funções de (f_n) e de seu limite.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 3.2. Considere a sequência de funções contínuas (f_n) definidas no intervalo $[0, 1]$ onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = x^n$ (Figura 3.6). Então $f_n \rightarrow f$ ponto-a-ponto, sendo f dada por $f(x) = 0$ se $x \in [0, 1)$ e $f(1) = 1$. Como $f(x) \neq 0$ somente no ponto $x = 1$, dizemos que $f_n \rightarrow 0$ q.s em $[0, 1]$. ♦

Exemplo 3.3. Não é difícil mostrar que o conjunto A dos *números algébricos*¹³ é enumerável e denso em na reta.¹⁴ Pela Proposição 2.3, A tem medida nula. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{se } x \in A \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ ou } x \in \mathbb{R} \setminus A. \end{cases}$$

Como f não se anula apenas num conjunto de medida zero, concluímos que $f = 0$ quase sempre em $\mathbb{R}$. ♦

Exemplo 3.4. Misturando as ideias dos exemplos anteriores, sejam A o conjunto dos números algébricos e (f_n) uma sequência de funções em $[a, b]$ onde, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^n & \text{se } x \in A \cap [a, b], \\ 2^{-n} & \text{se } x \in [a, b] \setminus A. \end{cases}$$

Para $x \in A \cap [a, b]$ temos $\lim f_n(x) = +\infty$ e para $x \in [a, b] \setminus A$ temos $\lim f_n(x) = 0$. Concluímos assim que $f \rightarrow 0$ q.s em $[a, b]$. ♦

É importante observar que a convergência q.s de sequências não garante a unicidade do limite (contraexemplos são fáceis de fazer), mas vale a *unicidade q.s*. É o que nos mostra o próximo resultado.

Proposição 3.3. *Seja (f_n) uma sequência de funções definidas em X tal que $f_n \rightarrow f$ q.s em $[a, b]$. Então $f_n \rightarrow g$ q.s se, e somente se, $f = g$ q.s.*

¹³Um número real é dito *algébrico* quando é raiz de ao menos um polinômio com coeficientes inteiros.

¹⁴Sugestão: enumere o conjunto dos polinômios com coeficientes inteiros $(p_1, p_2, p_3, \dots)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, faça $R_n = \{x \in \mathbb{R}; p_n(x) = 0\}$ e mostre que R_n é finito (tem no máximo n elementos). O conjunto dos algébricos escreve-se $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n$. Logo, é enumerável. Por fim, prove que todo racional é algébrico e conclua que os números algébricos formam um conjunto denso em $\mathbb{R}$.

Demonstração. Suponhamos que $\lim f_n = f$ e $\lim f_n = g$ q.s em $[a, b]$. Consideremos os conjuntos $D = \{x \in \mathbb{R}; f(x) \neq g(x)\}$, $F = \{x \in \mathbb{R}; f_n(x) \text{ não converge para } f(x)\}$ e $G = \{x \in \mathbb{R}; f_n(x) \text{ não converge para } g(x)\}$. Nossa hipótese é que $m(F) = m(G) = 0$ e queremos mostrar que $m(D) = 0$. Se mostrarmos que D é subconjunto de $F \cup G$, o resultado seguirá da Proposição 2.4 do capítulo anterior. Tomemos $x \in D$ e suponhamos que $x \notin F$. Então $\lim f_n(x) = f(x)$. Ora, se $x \notin G$, temos $\lim f_n(x) = g(x)$, donde $f(x) = g(x)$, isto é, $x \notin D$, contradição. Então $x \in G$. Logo, $x \in F \cup G$, donde $D \subset F \cup G$.

Reciprocamente, suponhamos que $f = g$ q.s em $[a, b]$. Sejam D, F e G como acima. Nossa hipótese agora é que $m(F) = m(D) = 0$ e queremos mostrar que $m(G) = 0$. Analogamente ao que fizemos acima, se mostrarmos que G é subconjunto de $F \cup D$ o resultado seguirá novamente da Proposição 2.4. Sendo assim, tomemos $x \in G$ e suponhamos que $x \notin F$. Então $\lim f_n(x) = f(x)$. Se $x \notin D$, temos $g(x) = f(x) = \lim f_n(x)$, ou seja, $x \notin G$, contradição. Logo, $x \in D$, donde $x \in F \cup D$, ou melhor, $G \subset F \cup D$. Isso completa a demonstração. ■

Utilizaremos a notação $\varphi_n \uparrow f$ para indicar que a sequência (φ_n) é não-decrescente e $\varphi_n \rightarrow f$. Assim, por exemplo, se $\lim \varphi_n = f$ quase sempre em $[a, b]$, escrevemos $\varphi_n \uparrow f$ q.s em $[a, b]$. Considerações análogas valem para a notação $\varphi_n \downarrow f$. Este tipo de convergência é denominada *convergência monótona*. Neste caso, dizemos que φ_n converge monotonamente para f em $[a, b]$. Vamos aos Lemas.

Primeiro Lema Fundamental. *Seja (φ_n) uma sequência não-crescente de funções degrau não-negativas definidas em $[a, b]$. Então $\varphi_n \downarrow 0$ q.s se, e somente se, $\lim \int_a^b \varphi_n = 0$.*

Demonstração. Suponhamos que $\varphi_n \downarrow 0$ q.s. Primeiramente notemos que, dado $n \in \mathbb{N}$, como φ_n é não-negativa, temos

$$\int_a^b \varphi_n \geq 0.$$

Além disso, como $\varphi_1([a, b])$ é finito, existe $M = \max\{\varphi_1(x); x \in [a, b]\}$. Seja dado $\varepsilon > 0$. Mostraremos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$p \in \mathbb{N}, p > n_0 \Rightarrow \int_a^b \varphi_p < \varepsilon,$$

o que garantirá o resultado.

Como $\varphi_n \downarrow 0$ q.s, o conjunto $D_0 = \{x \in [a, b]; \lim \varphi_n(x) \neq 0\}$ tem medida nula. Além disso, como φ_n é uma função degrau, para cada $n \in \mathbb{N}$ o conjunto

$$D_n = \{x \in [a, b]; \varphi_n \text{ é descontínua em } x\}$$

é finito e, portanto, tem medida nula. Assim, $D = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$ também tem medida nula em virtude da Proposição 2.4. Logo, escolhendo $\varepsilon' = \varepsilon/(M + b - a)$, existem intervalos abertos $I_1, I_2, I_3, \dots$ tais que $D \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \text{amp}(I_n) < \varepsilon'$. Por outro lado, se $\alpha \notin D$, então $\alpha \notin D_n$ para todo $n \geq 0$. Em particular, $\alpha \notin D_0$, o que implica $\lim \varphi_n(\alpha) = 0$, e, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \notin D_n$, donde φ_n é contínua em α . Daí, existe $m = m(\alpha) \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_m(\alpha) < \varepsilon'$, e, como φ_m é contínua em α , existe um intervalo aberto $I(\alpha) \supset \{\alpha\}$ no qual φ_m é constante e igual a $\varphi_m(\alpha)$.

Notemos que, dado $x \in [a, b]$, então, se $x \in D$, temos $x \in I_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$, e se $x \notin D$, então $x \in I(\alpha)$. Em todo caso, os intervalos da sequência (I_n) juntamente com os intervalos do conjunto $\{I(\alpha); \alpha \notin D\}$ formam uma cobertura de $[a, b]$ por meio de abertos. Como $[a, b]$ é compacto, pelo Teorema de Borel-Lebesgue, podemos extrair uma cobertura finita $I_{n_1}, I_{n_2}, \dots, I_{n_k}, I(\alpha_1), I(\alpha_2), \dots, I(\alpha_q)$ de $[a, b]$. Seja $n_0 = \max\{m(\alpha_1), m(\alpha_2), \dots, m(\alpha_q)\}$. Se $p > n_0$, então, dado $x \in I(\alpha_1) \cup I(\alpha_2) \cup \dots \cup I(\alpha_q)$, temos $x \in I(\alpha_j)$ para algum $j = 1, 2, \dots, q$. Daí,

$$\varphi_p(x) \leq \varphi_{n_0}(x) \leq \varphi_{m(\alpha_j)}(x) = \varphi_{m(\alpha_j)}(\alpha_j) < \varepsilon'.$$

Pondo $A = I(\alpha_1) \cup I(\alpha_2) \cup \dots \cup I(\alpha_q)$, podemos expressar A como uma reunião finita de abertos dois a dois disjuntos, digamos, $A = I'_1, I'_2, \dots, I'_r$. Além disso, como (φ_n) é não-crescente e $M = \max\{\varphi_1(x); x \in [a, b]\}$, temos $\varphi_p(x) \leq \varphi_1(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. O que fizemos até agora nos permitiu concluir dois fatos:

- (1) Se $x \in I_{n_i}$, onde $1 \leq i \leq k$, então $\varphi_p(x) \leq M$; e
- (2) Se $x \in I'_j$, onde $1 \leq j \leq r$, então $\varphi_p(x) < \varepsilon'$.

Destes fatos, segue-se que

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi_p &\leq M[\text{amp}(I_{n_1}) + \dots + \text{amp}(I_{n_k})] + \varepsilon'[\text{amp}(I'_1) + \dots + \text{amp}(I'_r)] < \\ &< M\varepsilon' + \varepsilon'(b - a) = \varepsilon'(M + b - a) = \varepsilon, \end{aligned}$$

donde $\lim \int_a^b \varphi_n = 0$, como queríamos.

Reciprocamente, suponhamos que $\lim \int_a^b \varphi_n = 0$. Como (φ_n) é uma sequência não-crescente de termos não-negativos, $f(x) = \lim \varphi_n(x)$ existe para todo $x \in [a, b]$. Queremos mostrar que $f = 0$ q.s em $[a, b]$, ou, equivalentemente, que o conjunto $P = \{x \in [a, b]; f(x) > 0\}$ tem medida nula. Ora, é imediato que $P = \bigcup_{m=1}^{\infty} P_m$, onde

$$P_m = \{x \in [a, b]; f(x) \geq 1/m\}.$$

Pela Proposição 2.4, será suficiente mostrar que P_m tem medida nula para cada $m \in \mathbb{N}$. Assim, consideremos $m \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que $m(P_m) = 0$.

Fixando $n \in \mathbb{N}$, como os pontos da partição associada a φ_n tem medida nula, podemos admitir sem perda de generalidade que P_m não contém algum deles. Já que $\varphi_n \geq f$, temos $\varphi_n(x) \geq f(x) \geq 1/m$ para cada $x \in P_m$. Daí, se $x \in P_m$, da definição de função degrau, existe um intervalo aberto $I_x \subset [a, b]$ contendo x no qual φ_n é constante e $\geq 1/m$. A união $\bigcup_{x \in P_m} I_x$ pode ser expressa em uma quantidade finita de intervalos, pois φ_n assume apenas uma quantidade finita de valores (já que é uma função degrau). Logo, P_m é coberto por uma quantidade finita de intervalos contidos em $[a, b]$, e φ_n é constante e $\geq 1/m$ em cada um deles. Denotando por s_n a soma das amplitudes destes intervalos, temos

$$\int_a^b \varphi_n \geq \frac{s_n}{m}. \quad (3.1)$$

Agora, dado $\varepsilon > 0$, como $\lim \int_a^b \varphi_n = 0$, teremos $\int_a^b \varphi_n < \varepsilon/m$ para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. De (3.1), $s_n < \varepsilon$. Portanto, P_m é coberto por uma quantidade finita de intervalos cuja soma s_n de suas amplitudes é menor do que ε . Segue-se que P_m tem medida nula.

Isto completa a demonstração do Lema. ■

Segundo Lema Fundamental. *Seja (φ_n) uma sequência não-decrescente de funções degrau definidas em $[a, b]$. Se existe M tal que $\int_a^b \varphi_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então (φ_n) converge q.s em $[a, b]$.*

Demonstração. Vamos supor que os termos da sequência (φ_n) são não-negativos (no caso geral basta considerar a sequência de termos $\varphi_n - \varphi_1$, pois (φ_n) é não-decrescente). Seja $H = \{x \in [a, b]; \lim \varphi_n(x) = +\infty\}$. Se $x \notin H$, então a sequência $(\varphi_n(x))$ é limitada e, pela monotonicidade, é convergente. Basta então mostrar que H tem medida nula. Além disso, o conjunto dos pontos de descontinuidade de cada φ_n tem medida nula (pois é finito). Então podemos supor que as funções φ_n são contínuas nos pontos de H .

Dado $\varepsilon > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $H_n = \{x \in [a, b]; \varphi_n(x) > M/\varepsilon\} \setminus P_n$, onde P_n é a partição associada a φ_n . Então $H \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (H_n \cup P_n)$. Como $\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ tem medida nula, para mostrar que $m(H) = 0$ basta mostrar que $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ é uma reunião de intervalos cuja soma das amplitudes não supera ε .

Em virtude da definição de função degrau, cada H_n é união de finitos intervalos disjuntos¹⁵. Afirmamos que a soma s_n das amplitudes destes intervalos é menor do que ε . De fato, denotando por (x'_{i-1}, x'_i) os intervalos de $P_n = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_t = b\}$ que estão contidos em H_n , temos¹⁶

$$\begin{aligned} \frac{M}{\varepsilon} \sum (x'_i - x'_{i-1}) &= \sum \frac{M}{\varepsilon} (x'_i - x'_{i-1}) < \sum a'_i (x'_i - x'_{i-1}) \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^t a_n (x_n - x_{n-1}) = \int_a^b \varphi_n \leq M, \end{aligned}$$

donde

$$s_n = \sum (x'_i - x'_{i-1}) < \varepsilon. \quad (3.2)$$

Por outro lado, dado que (φ_n) é não-decrescente, segue-se que

$$H_1 \subset H_2 \subset \dots \subset H_n. \quad (3.3)$$

Além disso, como H_k e H_{k+1} são expressos como união finita de intervalos disjuntos, para todo $k \in \mathbb{N}$, o mesmo pode-se dizer de $H_{k+1} \setminus H_k$. Assim, podemos escrever

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n = H_1 \cup H_2 \setminus H_1 \cup H_3 \setminus H_2 \cup \dots \quad (3.4)$$

e, com isso, expressar $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ como uma união de intervalos disjuntos. De (3.2) e (3.3) segue-se que, para cada $n \in \mathbb{N}$, os primeiros n conjuntos em (3.4) estão contidos em H_n e, portanto, a soma das amplitudes dos intervalos referentes a estes conjuntos são $s_n < \varepsilon$. Daí, a soma das amplitudes dos intervalos em $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ é $\lim s_n \leq \varepsilon$. Como ε é arbitrário, H tem medida nula. Isto completa a demonstração. ■

¹⁵Estamos interessados em intervalos **disjuntos** para que, quando somarmos suas amplitudes, não somemos duas vezes uma mesma parte.

¹⁶Assim como na definição, a'_j é o valor que φ_n assume em (x'_{i-1}, x'_i) . O mesmo serve para a_n em (x_{n-1}, x_n) .

Corolário 3.2. *Seja (φ_n) uma sequência de funções não-negativas definidas em $[a, b]$ tais que $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \varphi_n < \infty$. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ converge q.s em $[a, b]$.*

Demonstração. Basta aplicar o Segundo Lema Fundamental à sequência (t_n) das reduzidas da série $\sum \varphi_n$. ■

3.3 A classe $L^+[a, b]$

A segunda etapa do desenvolvimento da integral à Lebesgue-Riesz é estender a classe de funções integráveis a uma maior, incluindo as funções do tipo descrito no Segundo Lema Fundamental, isto é, que são limite de uma sequência de funções degrau satisfazendo aquelas hipóteses. Vamos às definições formais.

A Classe $L^+[a, b]$ é o conjunto das funções $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tais que existe uma sequência não-decrescente de funções degrau (φ_n) satisfazendo as seguintes condições:

(i) Existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_a^b \varphi_1 \leq \int_a^b \varphi_2 \leq \cdots \int_a^b \varphi_n \leq \cdots \leq M;$$

(ii) $\varphi_n \uparrow f$ quase sempre em $[a, b]$.

Cada sequência (φ_n) satisfazendo as duas condições acima é denominada uma *sequência integrante* de f .

No item (i) acima vimos que a sequência $(\int_a^b \varphi_n)$ é monótona, limitada e, portanto, convergente. Como, pelo item (ii), temos $\varphi_n \uparrow f$, parece razoável definir a integral de f como sendo o limite de $\int_a^b \varphi_n$ quando $n \rightarrow \infty$. Faremos isto.

Dada uma função $f \in L^+[a, b]$, a *integral* (no sentido de Lebesgue) de f em $[a, b]$ é definida por

$$\int_a^b f = \lim \int_a^b \varphi_n, \quad (3.5)$$

onde (φ_n) é uma sequência integrante de f .

Observe que a sequência (φ_n) não é única. Assim, para que $\int_a^b f$ esteja bem definida, devemos mostrar que (3.5) não depende da escolha da sequência integrante. Este fato se seguirá da

Proposição 3.4. *Sejam $f, g \in L^+[a, b]$ e $(\varphi_n), (\psi_n)$ sequências integrantes de f e g , respectivamente. Se $f \leq g$ q.s em $[a, b]$ então*

$$\lim \int_a^b \varphi_n \leq \lim \int_a^b \psi_n.$$

Demonstração. Para cada $m \in \mathbb{N}$, consideremos a sequência $(\varphi_m - \psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_m - \psi_n) = \varphi_m - \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n \leq f - g \leq 0 \quad (3.6)$$

quase sempre em $[a, b]$. Denotemos por $(\varphi_m - \psi_n)^+$ a sequência cujos termos são as partes positivas de $\varphi_m - \psi_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De (3.6) e do fato de $(\varphi_m - \psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ser não-crescente, segue-se que $(\varphi_m - \psi_n)^+$ converge para 0 quase sempre em $[a, b]$. Assim, o Primeiro Lema Fundamental nos dá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (\varphi_m - \psi_n)^+ = 0.$$

Por outro lado, como $\varphi_m - \psi_n \leq (\varphi_m - \psi_n)^+$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi_m &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_a^b (\varphi_m - \psi_n) + \int_a^b \psi_n \right] \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (\varphi_m - \psi_n)^+ + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n. \end{aligned}$$

Fazendo $m \rightarrow \infty$ obtemos o resultado. ■

Segue-se da Proposição acima que, se (φ_n) e (ψ_n) são sequências integrantes de f , como $f \leq f$, temos $\lim \int_a^b \varphi_n \leq \lim \int_a^b \psi_n$ e $\lim \int_a^b \psi_n \leq \lim \int_a^b \varphi_n$, ou seja,

$$\lim \int_a^b \varphi_n = \lim \int_a^b \psi_n,$$

o que demonstra a unicidade de $\int_a^b f$.

Corolário 3.3. *Sejam $f, g \in L^+[a, b]$. Se $f \leq g$ q.s em $[a, b]$, então $\int_a^b f \leq \int_a^b g$. Em particular, se $f = g$ q.s em $[a, b]$, então suas integrais são iguais.*

No que segue, $\int_a^b f$ representa a integral no sentido de Riemann de f em $[a, b]$, assim como $\bar{\int}_a^b f$ e $\underline{\int}_a^b f$ representam as integrais superior e inferior de f neste mesmo intervalo. O seguinte exemplo mostra que $\mathcal{C}[a, b] \subset L^+[a, b]$ e algo a mais.

Exemplo 3.5. Toda função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pertence à classe $L^+[a, b]$ e, além disso, $\int f = \int f$. De fato, seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $P_n = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ a partição de $[a, b]$ tal que

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{2^n}, \quad i = 1, 2, \dots, 2^n,$$

a qual associaremos à função degrau φ_n dada por¹⁷

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{2^n} m_i \mathcal{X}_{I_i},$$

onde $m_i = \inf\{f(x); x \in I_i\}$ e $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, para cada $i = 1, 2, \dots, 2^n$. Está claro que (φ_n) é uma sequência não-decrescente de funções degrau e que

$$\int_a^b \varphi_1 \leq \int_a^b \varphi_2 \leq \dots \leq \lim \int_a^b \varphi_n = \int_a^b f. \quad (3.7)$$

¹⁷Vale lembrar que $\mathcal{X}_{I_k}$ é a função característica do conjunto I_k .

Precisamos mostrar que $\varphi_n \rightarrow f$ q.s em $[a, b]$. Veremos que isto ocorre em todo o intervalo.

Dado $x \in [a, b]$, fixemos $n \in \mathbb{N}$. Então existe $k \in \{1, 2, \dots, 2^n\}$ tal que $x \in I_k = J_n(x)$ e $\text{amp}(J_n(x)) = x_k - x_{k-1} = (b-a)/2^n$. Além disso, como f é contínua e $J_n(x)$ é compacto, o Teorema de Weierstrass garante a existência de $y_n \in J_n(x)$ tal que $f(y_n) = m_k = \varphi_n(x)$. Fazendo $n \rightarrow \infty$, os extremos inferiores dos intervalos $J_n(x)$, bem como os superiores, formam sequências que convergem para x . Pelo Teorema do Sanduíche, $\lim y_n = x$, donde $\lim \varphi_n(x) = \lim f(y_n) = f(x)$, pois f é contínua. Isto mostra que $\varphi_n \rightarrow f$ em $[a, b]$. Por fim, a igualdade $\int f = \int f$ segue de (3.7). $\blacklozenge$

Com maior generalidade, não só funções contínuas pertencem à classe $L^+[a, b]$, mas toda função integrável à Riemann e, além disso, a igualdade $\int f = \int f$ continua válida. É o que veremos no próximo resultado. Lembrando que o símbolo $\mathcal{R}[a, b]$ denota o conjunto de todas as funções integráveis à Riemann no intervalo $[a, b]$.

Proposição 3.5. *Vale a inclusão $\mathcal{R}[a, b] \subset L^+[a, b]$ e, além disso, $\int_a^b f = \int_a^b f$ para toda função $f \in \mathcal{R}[a, b]$.*

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{R}[a, b]$ e consideremos a sequência (φ_n) definida exatamente como no Exemplo 3.5. Pelos mesmos motivos de antes, (φ_n) é não-decrescente e limitada por M , onde

$$M = \lim \int_a^b \varphi_n = \int_a^b f = \int_a^b f. \quad (3.8)$$

Afirmamos que $\varphi_n \rightarrow f$ q.s em $[a, b]$. Mostraremos este fato verificando que o conjunto dos $x \in [a, b]$ tais que $(\varphi_n(x))$ não converge para $f(x)$ tem medida nula.

Dado $x \in [a, b]$ tal que $\lim \varphi_n(x) \neq f(x)$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_n(x) < f(x) - 1/k$ para todo n natural.¹⁸ Para cada k em $\mathbb{N}$, fazendo $J_n = \{x \in [a, b]; \varphi_n(x) < f(x) - 1/k\}$, segue-se que

$$F_k = \{x \in [a, b]; \varphi_n(x) < f(x) - 1/k \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n. \quad (3.9)$$

Daí,

$$F = \{x \in [a, b]; \varphi_n(x) \text{ não converge para } f(x)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k. \quad (3.10)$$

Mostraremos que $m(F_k) = 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Mas antes, introduziremos algumas notações úteis.

Pela definição de função degrau, para cada $n \in \mathbb{N}$, ambos os conjuntos J_n e $[a, b] \setminus J_n = J'_n$ podem ser expressos como uma união finita de intervalos dois a dois disjuntos.¹⁹

¹⁸De fato, como $\lim \varphi_n(x) \neq f(x)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ dado, podemos encontrar $n > n_0$ satisfazendo $f(x) - \varphi_n(x) = |\varphi_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$, donde $\varphi_n(x) \leq f(x) - \varepsilon$. Como $(\varphi_n(x))$ é não-decrescente, temos $\varphi_1(x) \leq \dots \leq \varphi_n(x) \leq f(x) - \varepsilon$. Fazendo $n_0 \rightarrow \infty$, obtemos $\varphi_n(x) \leq f(x) - \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Escolhendo $k \in \mathbb{N}$ tal que $1/k < \varepsilon$, segue-se que $\varphi_n(x) \leq f(x) - \varepsilon < f(x) - 1/k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

¹⁹Assim como fizemos na demonstração do Segundo Lema Fundamental, estamos desconsiderando (removendo) os elementos das partições associadas às φ_n , visto que estas formam apenas uma coleção enumerável de conjuntos de medida nula. Só não estamos explicitando esta desconsideração por simplicidade.

Denotaremos por $\text{amp}(J_n)$ a soma das amplitudes dos intervalos em J_n . Além disso, com respaldo na Proposição 2.2, denotaremos respectivamente por

$$\int_{J_n}^b \varphi_n \quad \text{e} \quad \int_{J'_n}^b \varphi_n$$

as integrais de Riemann sobre os intervalos de J_n e J'_n , isto é, a soma das integrais em cada um deles.

Estamos prontos para completar nossa demonstração. Fixando $k \in \mathbb{N}$, mostremos que F_k tem medida nula. Para isto, seja dado $\varepsilon > 0$. Em (3.8) vimos que $\int_a^b \varphi_n \uparrow \int_a^b f$. Tomando n suficientemente grande e utilizando o fato de que $\varphi_n \leq f$ e $J_n = \{x \in [a, b]; \varphi_n(x) < f(x) - 1/k\}$, temos

$$\begin{aligned} \int_a^b f &< \int_a^b \varphi_n + \frac{\varepsilon}{k} = \int_{J'_n}^b \varphi_n + \int_{J_n}^b \varphi_n + \frac{\varepsilon}{k} \leq \\ &\leq \int_{J'_n}^b f + \int_{J_n}^b (f - \frac{1}{k}) + \frac{\varepsilon}{k} = \int_{J'_n}^b f + \int_{J_n}^b f - \int_{J_n}^b \frac{1}{k} + \frac{\varepsilon}{k} = \\ &= \int_a^b f - \frac{\text{amp}(J_n)}{k} + \frac{\varepsilon}{k}. \end{aligned}$$

Logo, $\text{amp}(J_n) < \varepsilon$. De (3.9) temos $F_k \subset J_n$, donde $m(F_k) = 0$.

Segue-se de (3.10) e da Proposição 2.4 que F tem medida nula, ou seja, $\varphi_n \rightarrow f$ q.s em $[a, b]$. Isto mostra que $\lim \int_a^b \varphi_n = \int_a^b f$. Por fim, de (3.8), obtemos $\int_a^b f = \int_a^b f$ como queríamos. ■

Já podemos tirar proveito do que fizemos até aqui, isto é, a classe $L^+[a, b]$ já estende o conjunto das funções integráveis no sentido de Riemann.

Exemplo 3.6. Vale $R[0, 1] \subsetneq L^+[0, 1]$. De fato, a inclusão segue da Proposição 3.5, e a restrição é trivial, visto que a função de Dirichlet definida no Exemplo 2.6 se iguala à função nula quase sempre em $[0, 1]$, donde sua integral é 0 em virtude do Corolário 3.3. Do mesmo modo concluímos que toda a classe $\mathcal{D}[a, b]$ das funções tipo-Dirichlet²⁰ no intervalo $[a, b]$ está contida em $L^+[a, b]$. ♦

O próximo resultado decorre imediatamente da Proposição 3.2 e da definição de integral.

Proposição 3.6. *Sejam $f, g \in L^+[a, b]$ e $r \in \mathbb{R}$ não-negativo. Tem-se que:*

- (a) *Se $c \in (a, b)$, então $f|_{[a, c]} \in L^+[a, c]$, $f|_{[c, b]} \in L^+[c, b]$ e $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$;*
- (b) *$f + g \in L^+[a, b]$ e $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$;*
- (c) *$rf \in L^+[a, b]$ e $\int_a^b rf = r \int_a^b f$;*
- (d) *Se $f \geq 0$ q.s em $[a, b]$, então $\int_a^b f \geq 0$.*

Vale observar que a exigência de se tomar r não-negativo deve-se ao fato de que estamos sujeitos a sequências não-decrescentes de funções degrau. O próximo exemplo mostra que a subtração não é uma operação bem definida na classe $L^+[a, b]$.

Exemplo 3.7. Seja $E \subset [0, 1]$ o conjunto de Cantor generalizado, cuja medida é não-nula.²¹ Por simplicidade, vamos assumir que $\sum_{n=1}^{\infty} \text{amp}(I_n) = 1/2$, onde (I_n) é a sequência

²⁰Cf. Exemplo 2.7 do capítulo anterior.

²¹Cf. Seção 2.4.2.

dos intervalos removidos na construção de E . Afirmamos que $1 - \mathcal{X}_E \in L^+[0, 1]$. De fato, consideremos a sequência de funções degrau (φ_n) , onde

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^n \mathcal{X}_{I_i}.$$

Então $\varphi_n \uparrow 1 - \mathcal{X}_E$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 \varphi_n = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \mathcal{X}_{I_i} = \sum_{i=1}^n \int_0^1 \mathcal{X}_{I_i} = \sum_{i=1}^n \text{amp}(I_i),$$

donde

$$\lim \int_0^1 \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \text{amp}(I_n) = \frac{1}{2}.$$

Logo, $1 - \mathcal{X}_E \in L^+[0, 1]$ e $\int_0^1 (1 - \mathcal{X}_E) = 1/2$.

Agora, suponhamos por absurdo que $\mathcal{X}_E \in L^+[0, 1]$. Ora, a sequência (ψ_n) dada por $\psi_n = \varphi_n + \mathcal{X}_E$, $n \in \mathbb{N}$, é não-decrescente e

$$\lim \psi_n = \lim(\varphi_n + \mathcal{X}_E) = 1 - \mathcal{X}_E + \mathcal{X}_E = 1.$$

Daí, $\psi_n \uparrow 1$ em $[0, 1]$. Pela definição de integral,

$$\begin{aligned} \lim \int_0^1 \varphi_n + \int_0^1 \mathcal{X}_E &= \lim \int_0^1 (\varphi_n + \mathcal{X}_E) = \\ &= \lim \int_0^1 \psi_n = \int_0^1 1 = 1, \end{aligned}$$

o que nos dá $\int_0^1 \mathcal{X}_E = 1/2$. Consideremos uma sequência integrante (ξ_n) de $\mathcal{X}_E$. Como $\mathcal{X}_E \geq 0$, podemos admitir que $\xi_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\lim \int_0^1 \xi_n = \int_0^1 \mathcal{X}_E = \frac{1}{2} > 0,$$

donde $\int_0^1 \xi_n > 0$ para n suficientemente grande. Pela definição de função degrau, ξ_n é positiva em pelo menos um intervalo aberto. Seja $I = (a, b)$ um intervalo aberto contido em algum dos I_k removidos tal que ξ_n seja positiva em I .²² Então $I \cap E = \emptyset$, donde $\mathcal{X}_E(x)\mathcal{X}_I(x) = 0$ para todo $x \in [0, 1]$. Logo, $\int_0^1 \mathcal{X}_E \mathcal{X}_I = 0$. Por outro lado, como $\xi_n \leq \mathcal{X}_E$, temos

$$\xi_n(x)\mathcal{X}_I(x) \leq \mathcal{X}_E(x)\mathcal{X}_I(x), \quad \text{para todo } x \in [0, 1].$$

Portanto,

$$0 = \int_0^1 \mathcal{X}_E \mathcal{X}_I \geq \int_0^1 \xi_n \mathcal{X}_I = \int_a^b \xi_n > 0,$$

o que é uma contradição. Consequentemente $\mathcal{X}_E \notin L^+[0, 1]$.

Concluimos que, embora as funções $f(x) = 1$ e $g(x) = 1 - \mathcal{X}_E(x)$ pertençam à classe $L^+[0, 1]$, não é verdade que $(f - g)(x) = 1 - [1 - \mathcal{X}_E(x)] = \mathcal{X}_E(x)$ também pertença. ♦

²²Para encontrar I façamos o seguinte. Seja J um intervalo aberto no qual ξ_n é positiva. Se $J \subset I_k$ para algum $k \in \mathbb{N}$, fazemos $I = J$. Caso contrário, existe $x_0 \in J \cap E$. Como J é aberto, existe uma distância entre x_0 e os extremos de J . Assim como na Seção 2.4.2, existe um passo n_0 no qual a amplitude dos intervalos remanescentes é menor do que essa distância. Assim, J contém o intervalo de E_{n_0} do qual x_0 pertence. Daí, o próximo intervalo a ser removido desta parte de E_{n_0} será $I_k \subset J$. Tomamos então $I = I_k$.

A integral de Lebesgue-Riesz ainda não foi completamente formulada. O problema apontado pelo exemplo anterior será eliminado na próxima seção, quando estendermos a classe $L^+[a, b]$ de modo a incluir todas as operações usuais.

3.4 A integral de Lebesgue

Denotaremos por $L[a, b]$ (ou simplesmente L , se o intervalo estiver subentendido ou não for interessante) o conjunto de todas as funções $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f = f_1 - f_2$, onde $f_i \in L^+[a, b]$, $i = 1, 2$. Observe que $L^+[a, b] \subsetneq L[a, b]$ em virtude do Exemplo 3.7. As funções f_1 e f_2 são ditas *funções componentes* de f . É óbvio que a decomposição de uma função $f \in L$ não é única. Adiante mostraremos que a escolha das funções componentes não interfere no valor da integral.

Antes de mostrarmos que as principais operações estão bem definidas no conjunto $L[a, b]$, vejamos o exemplo abaixo, o qual nos será útil.

Exemplo 3.8. Dadas $f, g \in L^+[a, b]$, tem-se $\max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in L^+[a, b]$. De fato, sejam (φ_n) e (ψ_n) sequências integrantes de f e g , respectivamente, F o conjunto no qual $(\varphi_n(x))$ não converge para $f(x)$ e G o conjunto onde $\psi_n(x)$ não converge para $g(x)$. Por hipótese, $m(F) = m(G) = 0$, donde $m(F \cup G) = 0$. Considere a sequência (ξ_n) onde $\xi_n = \max\{\varphi_n, \psi_n\}$. Seja $x \in [a, b] \setminus (F \cup G)$, digamos, com $g(x) < f(x)$.²³ Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$, tem-se $\varphi_n(x) > g(x) \geq \psi_n(x)$. Daí, $\lim \xi_n(x) = \lim \varphi_n(x) = f(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, donde $\xi_n \uparrow \max\{f, g\}$ q.s em $[a, b]$. Além disso, como as sequências (φ_n) e (ψ_n) são monótonas e as sequências $(\int_a^b \varphi_n)$ e $(\int_a^b \psi_n)$ são limitadas, concluímos que $(\int_a^b \xi_n)$ é limitada (basta notar que $\max\{a, b\} \leq |a| + |b|$). Portanto, $\max\{f, g\} \in L^+[a, b]$. Analogamente mostra-se que $\min\{f, g\} \in L^+[a, b]$. ♦

Proposição 3.7. Se $f, g \in L[a, b]$ e $r \in \mathbb{R}$, então

$$f + g, \quad rf, \quad |f|, \quad \max\{f, g\} \text{ e } \min\{f, g\}$$

também pertencem a $L[a, b]$.

Demonstração. Fazendo $f = f_1 - f_2$ e $g = g_1 - g_2$, onde $f_i, g_i \in L^+[a, b]$, $i = 1, 2$, temos:

$$f + g = (f_1 - f_2) + (g_1 - g_2) = (f_1 + g_1) - (f_2 + g_2) \in L,$$

pois $f_1 + g_1$ e $f_2 + g_2$ pertencem a $L^+[a, b]$. Além disso, se $r \geq 0$, então

$$f = r(f_1 - f_2) = rf_1 - rf_2 \in L,$$

pois $rf_1, rf_2 \in L^+[a, b]$. Se $r < 0$, então $-r > 0$, donde

$$f = r(f_1 - f_2) = (-r)f_2 - (-r)f_1 \in L$$

pelo mesmo motivo. Por outro lado, observando que

$$|f| = \max\{f_1, f_2\} - \min\{f_1, f_2\},$$

temos $|f| \in L[a, b]$ em virtude do Exemplo 3.8. Por fim, como

$$\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \quad \text{e} \quad \min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|),$$

²³O caso $f(x) < g(x)$ é análogo e o caso $g(x) = f(x)$ segue imediatamente da definição de limite.

os itens já mostrados garante que $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ pertencem a $L[a, b]$. ■

Observando que $f^+ = \max\{f, 0\}$ e $f^- = \max\{-f, 0\}$, o próximo corolário decorre imediatamente da proposição acima.

Corolário 3.4. *Se f pertence a $L[a, b]$, o mesmo vale para f^+ e f^- .*

Estamos prontos para finalizar nossa integral. Seja $f \in L[a, b]$. Então existem $f_1, f_2 \in L^+[a, b]$ tais que $f = f_1 - f_2$. Definimos a *Integral de Lebesgue* da função f em $[a, b]$ pela expressão

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx.$$

Novamente, por simplicidade, escreveremos apenas $\int_a^b f$. Afirmamos que esta integral é única, isto é, independe da decomposição de f . De fato, se $f = f_1 - f_2 = g_1 - g_2$ q.s em $[a, b]$, então $f_1 + g_2 = f_2 + g_1$ q.s, donde,

$$\begin{aligned} \int_a^b f_1 + \int_a^b g_2 &= \int_a^b (f_1 + g_2) = \\ &= \int_a^b (f_2 + g_1) = \int_a^b f_2 + \int_a^b g_1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_a^b f_1 - \int_a^b f_2 = \int_a^b g_1 - \int_a^b g_2,$$

o que prova a afirmação.

O conjunto $L[a, b]$ é precisamente a *classe das funções Lebesgue-integráveis*. Se f pertence a $L[a, b]$, dizemos que f é *Integrável a Lebesgue*, *integrável no sentido de Lebesgue*, *Lebesgue-integrável* ou simplesmente *integrável*. Mostraremos que esta classe satisfaz as propriedades clássicas de integração.

Proposição 3.8. *Sejam $f, g \in L[a, b]$ e $r \in \mathbb{R}$. Então:*

- (a) *Se $c \in (a, b)$, então $f|_{[a, c]} \in L[a, c]$, $f|_{[c, b]} \in L[c, b]$ e $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$;*
- (b) *$f + g \in L[a, b]$ e $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$;*
- (c) *$rf \in L[a, b]$ e $\int_a^b rf = r \int_a^b f$;*
- (d) *Se $f \geq 0$ q.s em $[a, b]$, então $\int_a^b f \geq 0$.*

Demonstração. Todos os itens são consequência da Proposição 3.6. De fato, pondo $f = f_1 - f_2$ e $g = g_1 - g_2$, onde $f_i, g_i \in L^+[a, b]$, $i = 1, 2$, segue-se que

$$\begin{aligned} \int_a^b f &= \int_a^b f_1 - \int_a^b f_2 = \left(\int_a^c f_1 + \int_c^b f_1 \right) - \left(\int_a^c f_2 + \int_c^b f_2 \right) = \\ &= \left(\int_a^c f_1 - \int_a^c f_2 \right) + \left(\int_c^b f_1 - \int_c^b f_2 \right) = \int_a^c f + \int_c^b f, \end{aligned}$$

o que prova o item (a). Além disso, como $f+g = (f_1+g_1) - (f_2+g_2)$, com $f_i+g_i \in L^+[a, b]$, $i = 1, 2$, a definição de integral nos dá:

$$\begin{aligned}\int_a^b [f+g] &= \int_a^b (f_1+g_1) - \int_a^b (f_2+g_2) = \left[\int_a^b f_1 + \int_a^b g_1 \right] - \left[\int_a^b f_2 + \int_a^b g_2 \right] = \\ &= \left[\int_a^b f_1 - \int_a^b f_2 \right] + \left[\int_a^b g_1 - \int_a^b g_2 \right] = \int_a^b f + \int_a^b g.\end{aligned}$$

Isto prova o item (b). Para o item (c), suponhamos inicialmente que $r \geq 0$. Então, como $rf = rf_1 - rf_2$, com $rf_i \in L^+[a, b]$, $i = 1, 2$, segue-se da definição que

$$\int_a^b rf = \int_a^b rf_1 - \int_a^b rf_2 = r \int_a^b f_1 - r \int_a^b f_2 = r \left(\int_a^b f_1 - \int_a^b f_2 \right) = r \int_a^b f.$$

Agora, supondo $r < 0$ e fazendo $rf = (-r)f_2 - (-r)f_1$, com $(-r)f_i \in L^+[a, b]$, $i = 1, 2$, pela definição, vem:

$$\begin{aligned}\int_a^b rf &= \int_a^b (-r)f_2 - \int_a^b (-r)f_1 = (-r) \int_a^b f_2 - (-r) \int_a^b f_1 = r \int_a^b f_1 - r \int_a^b f_2 = \\ &= r \left(\int_a^b f_1 - \int_a^b f_2 \right) = r \int_a^b f,\end{aligned}$$

o que prova (c). Por fim, sendo $f \geq 0$, temos $f_1 \geq f_2$, donde

$$\int_a^b f_1 \geq \int_a^b f_2 \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b f_1 - \int_a^b f_2 \geq 0.$$

Isto prova o item (d). ■

Os dois corolários seguintes são imediatos:

Corolário 3.5. *Se $f, g \in L[a, b]$ são tais que $f \geq g$ q.s em $[a, b]$, então $\int_a^b f \geq \int_a^b g$. Em particular, se $f = g$ q.s em $[a, b]$ então $\int_a^b f = \int_a^b g$.*

Corolário 3.6. *Se $f \in L[a, b]$, então*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Antes de iniciarmos as soluções dos problemas de convergência, apresentaremos sucintamente como a integral para a classe $L[a, b]$ pode ser utilizada na definição de conceitos importantes em cursos de teoria da medida.

3.4.1 Um pouco sobre funções e conjuntos mensuráveis

Nesta seção, examinaremos (superficialmente) como a integral de Lebesgue-Riesz pode ser utilizada para definir, de modo simples, a importante medida de Lebesgue, algo muito significativo tanto do ponto de vista teórico quando do pedagógico.

Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *mensurável* quando existe uma sequência de funções degrau (φ_n) tal que $\varphi_n \rightarrow f$ quase sempre em $[a, b]$.

Exemplo 3.9. As próprias funções escada são mensuráveis. As funções contínuas, em virtude do Exemplo 3.5, também são mensuráveis. Não é difícil mostrar que a soma, produto, multiplicação por escalar, o módulo, etc. de funções mensuráveis resulta em uma função mensurável. Isto decorre da Proposição 3.1. Por exemplo, se $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são mensuráveis, então existem sequências (φ_n) e (ψ_n) de funções degrau tais que $\lim \varphi_n = f$ e $\lim \psi_n = g$ q.s em $[a, b]$. Daí, $\lim \varphi_n \psi_n = fg$ quase sempre em $[a, b]$. Como cada $\varphi_n \psi_n$ é uma função degrau, fg é mensurável. $\blacklozenge$

Um resultado útil do ponto de vista operacional na classe $L[a, b]$ é dado pela seguinte proposição:

Proposição 3.9. *Se $f \in L[a, b]$ então existe uma sequência (φ_n) de funções degrau tal que $\varphi_n \rightarrow f$ q.s em $[a, b]$ e*

$$\int_a^b f = \lim \int_a^b \varphi_n.$$

Demonstração. Fazendo $f = f_1 - f_2$, onde $f_i \in L^+[a, b]$, $i = 1, 2$, existem sequências integrantes (ψ'_n) e (ψ''_n) de f_1 e f_2 , respectivamente. Por definição, estas sequências são tais que

$$\int_a^b f_1 = \lim \int_a^b \psi'_n \quad \text{e} \quad \int_a^b f_2 = \lim \int_a^b \psi''_n. \quad (3.11)$$

Tomando $\varphi_n = \psi'_n - \psi''_n$, temos $\varphi_n \rightarrow f$ q.s em $[a, b]$ e, além disso,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \int_a^b f - \int_a^b \varphi_n \right| = \left| \int_a^b (f - \varphi_n) \right| = \left| \int_a^b [(f_1 - f_2) - (\psi'_n - \psi''_n)] \right| = \\ &= \left| \int_a^b [(f_1 - \psi'_n) + (\psi''_n - f_2)] \right| = \left| \int_a^b (f_1 - \psi'_n) + \int_a^b (\psi''_n - f_2) \right| \leq \\ &\leq \left| \int_a^b (f_1 - \psi'_n) \right| + \left| \int_a^b (\psi''_n - f_2) \right| = \left| \int_a^b f_1 - \int_a^b \psi'_n \right| + \left| \int_a^b \psi''_n - \int_a^b f_2 \right| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

em virtude de (3.11). Portanto, $\int_a^b f = \lim \int_a^b \varphi_n$.

A proposição acima mostra que toda função integrável à Lebesgue é mensurável. Contudo, a recíproca deste resultado não é válida, como nos mostra o próximo exemplo.

Exemplo 3.10. A função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$ se $x \in (0, 1]$ e $f(0) = 0$ não é Lebesgue-integrável, embora seja mensurável. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a partição P de $[0, 1]$ dada por

$$P = \left\{ 0 = \frac{0}{2^n}, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \dots, \frac{2^n}{2^n} = 1 \right\}$$

e façamos

$$I_k = \left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right) \quad \text{e} \quad m_k = \inf \{ f(x); x \in I_k \} = \frac{2^n}{k},$$

para cada $k = 1, 2, \dots, 2^n$. Definindo $\varphi_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{2^n} m_k \chi_{I_k},$$

onde $\mathcal{X}_{I_k}$ é a função característica de I_k , $k = 1, 2, \dots, 2^n$, teremos $\varphi_n \rightarrow f$ q.s em $[0, 1]$. Além disso, por definição, a integral de φ_n em $[0, 1]$ será

$$\int_0^1 \varphi_n = \sum_{k=1}^{2^n} m_k \text{amp}(I_k) = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{2^n}{k} \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}.$$

Ora, se f fosse integrável em $[0, 1]$, como $\varphi_n \leq f$ para todo $n \in \mathbb{N}$, em virtude da Proposição 3.8, teríamos

$$\int_0^1 \varphi_n \leq \int_0^1 f,$$

para $n \in \mathbb{N}$ arbitrário. Daí,

$$+\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \varphi_n \leq \int_0^1 f \in \mathbb{R},$$

o que é absurdo. Portanto, $f \notin L[a, b]$. $\blacklozenge$

No entanto, se introduzirmos a hipótese de que a função mensurável f é “dominada” por uma função integrável, é possível estabelecer a

Proposição 3.10. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável. Se existe $g \in L[a, b]$ tal que $|f(x)| \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então f é integrável. Em particular, toda função mensurável e limitada é integrável.*

A demonstração deste fato pode ser encontrada em Medeiros e Mello (2008, p. 54) ou Chae (1995, p. 88). Não a faremos aqui. De posse deste fato, utilizaremos a integral de Lebesgue-Riesz que desenvolvemos até agora para definir a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$.

Dizemos que um conjunto $E \subset [a, b]$ é *mensurável* quando sua função característica $\mathcal{X}_E$ for mensurável. Em virtude da Proposição 3.10, toda função mensurável e limitada é Lebesgue-Riesz-integrável. Assim, se $E \subset [a, b]$ é um conjunto mensurável, sua *medida* é (bem) definida por

$$\mu(E) = \int_a^b \mathcal{X}_E.$$

Esta é a denominada *medida de Lebesgue*.

Exemplo 3.11. Os conjuntos (a, b) , $(a, b]$, $[a, b)$ e $[a, b]$ estão contidos em $[a, b]$, são mensuráveis e têm mesma medida $b - a$, a qual coincide com suas amplitudes. Assim, a medida de Lebesgue generaliza o conceito de amplitude de um intervalo. $\blacklozenge$

A medida definida acima equivale à medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$. Mais detalhes podem ser encontrados em Chae (1995) ou Medeiros e Mello (2008). O que exibimos sucintamente acima mostra como a integral de Lebesgue-Riesz pode ser utilizada para introduzir esta medida, da qual decorre a integral de Lebesgue clássica. Pelo benefício didático, muitos livros (os já citados são dois bons exemplos) introduzem a teoria da integração de Lebesgue a partir da integral de Lebesgue-Riesz.

Encerramos esta sessão com uma importante caracterização das funções Lebesgue-integráveis, a qual nos diz que a integral de Lebesgue é uma *integral absoluta*.

Exemplo 3.12. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável. Então $f \in L[a, b]$ é integrável se, e somente se, $|f| \in L[a, b]$. De fato, supondo f integrável, a integrabilidade de $|f|$ segue da Proposição 3.7. Reciprocamente, supondo $|f|$ integrável, a integrabilidade de f segue da Proposição 3.10. $\blacklozenge$

3.5 Teoremas de Beppo Levi e da Convergência Monótona

Nesta seção estabeleceremos algumas condições suficientes para assegurar a validade da passagem do limite sob a integral. A sequência de resultados que exibiremos a seguir culminará no primeiro teorema de convergência que trataremos neste trabalho.

Iniciamos observando que, na Seção 3.3, partimos de uma classe muito específica de funções integráveis (a de funções degrau) e realizamos um procedimento muito peculiar, baseado no Segundo Lema Fundamental, o qual gerou uma classe muito mais ampla do que $\mathcal{R}[a, b]$. A próxima proposição assegura que se realizarmos este procedimento novamente dentro da classe $L^+[a, b]$ não sairemos dela, isto é, a classe não será ampliada.

Proposição 3.11. *Seja (f_n) uma sequência não-decrescente de funções em $L^+[a, b]$. Se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\int_a^b f_n \leq M,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, então (f_n) converge q.s em $[a, b]$ para $f \in L^+[a, b]$ e

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n.$$

Em outras palavras, se (f_n) em $L^+[a, b]$ é não-decrescente e a sequência de suas integrais tem um mesmo limitante superior, então $\lim f_n \in L^+[a, b]$ e $\int_a^b \lim f_n = \lim \int_a^b f_n$.

Demonstração. Para cada $k \in \mathbb{N}$, como $f_k \in L^+[a, b]$, existe uma sequência não-decrescente (φ_{kn}) de funções degrau tal que $\varphi_{kn} \uparrow f_k$ q.s em $[a, b]$. Desta forma, temos o seguinte arranjo:

$$\begin{array}{l} \varphi_{11} \leq \varphi_{12} \leq \cdots \leq \varphi_{1n} \leq \cdots \longrightarrow f_1, \\ \varphi_{21} \leq \varphi_{22} \leq \cdots \leq \varphi_{2n} \leq \cdots \longrightarrow f_2, \\ \dots\dots\dots \vdots \\ \varphi_{i1} \leq \varphi_{i2} \leq \cdots \leq \varphi_{in} \leq \cdots \longrightarrow f_i, \\ \dots\dots\dots \vdots \end{array}$$

Por conseguinte, (φ_n) dada por $\varphi_n = \max\{\varphi_{in}; i = 1, 2, \dots, n\}$ é uma sequência não-decrescente de funções escada. Dado $n \in \mathbb{N}$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, temos $\varphi_{in} \leq f_i \leq f_n$, donde

$$\varphi_n \leq f_n. \quad (3.12)$$

Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b \varphi_n \leq \int_a^b f_n \leq M$. Em virtude do Segundo Lema Fundamental e da definição de $L^+[a, b]$, temos $\varphi_n \uparrow f$ q.s em $[a, b]$ para alguma função $f \in L^+[a, b]$ e, além disso,

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n. \quad (3.13)$$

Agora, como $\varphi_{in} \leq \varphi_n$ sempre que $i \leq n$, podemos fixar i e fazer $n \rightarrow \infty$ de modo a obter $f_i \leq f$ q.s em $[a, b]$. Por outro lado, de (3.12), temos $\varphi_i \leq f_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Fazendo agora $i \rightarrow \infty$ em $\varphi_i \leq f_i \leq f$ obtemos $\lim f_n = f$ q.s em $[a, b]$.

Ora, da desigualdade $\varphi_n \leq f_n \leq f$, temos $\int_a^b \varphi_n \leq \int_a^b f_n \leq \int_a^b f$. Portanto, de (3.13) e do Teorema do Sanduíche, concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f,$$

como queríamos demonstrar. ■

Segue-se daí que, nas condições descritas abaixo, vale a integração termo-a-termo de uma série em $L^+[a, b]$.

Corolário 3.7. *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uma série em $L^+[a, b]$ de termos positivos. Se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n f_i \leq M$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge q.s em $[a, b]$ para $f \in L^+[a, b]$ e, além disso,

$$\int_a^b f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n.$$

Em outras palavras, se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ em $L^+[a, b]$ é de termos positivos e a sequência das integrais de suas somas parciais têm um mesmo limitante, então $\int_a^b \sum_{i=1}^{\infty} f_n = \sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b f_n$.

Demonstração. Basta notar que, como $f_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a sequência (s_n) das somas parciais de $\sum f_n$ satisfaz as condições da Proposição 3.11. Fazendo $f = \lim s_n$, temos $f \in L^+[a, b]$ e

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \sum_{i=1}^n f_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_a^b f_i = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n,$$

o que prova o resultado. ■

Nosso primeiro teorema de convergência será obtido como uma consequência imediata do importante *Teorema de Beppo Levi*, devido ao matemático italiano Beppo Levi (1875-1961) que o demonstrou em 1906 no artigo *Sopra l'integrazione delle series*. Por este motivo, é comum na literatura referir-se ao Teorema da Convergência Monótona como Teorema de Beppo Levi e vice-versa. Aqui faremos a distinção destes resultados. Antes de demonstrá-lo, o próximo lema nos será útil.

Lema 3.1. *Seja $f \in L[a, b]$. Dado $\varepsilon > 0$, existem $f_1, f_2 \in L^+[a, b]$ tais que $f = f_1 - f_2$, $f_2 \geq 0$ e $\int_a^b f_2 < \varepsilon$.*

Demonstração. Seja dado $\varepsilon > 0$. Pela definição da classe $L[a, b]$, $f = g - h$, onde $g, h \in L^+[a, b]$. Seja (φ_n) uma sequência integrante da componente h . Para cada $n \in \mathbb{N}$, pondo $f = g - h = (g - \varphi_n) - (h - \varphi_n)$, segue-se que tanto $g - \varphi_n$ quanto $h - \varphi_n \geq 0$ pertencem a $L^+[a, b]$ (basta notar que $-\varphi_n$ ainda é uma função escada). Além disso, como $\int_a^b h = \lim \int_a^b \varphi_n$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (h - \varphi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b h - \int_a^b \varphi_n \right) \longrightarrow 0 < \varepsilon.$$

Figura 3.7: Beppo Levi (1875-1961).



Fonte: Domínio Público.²⁴

Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\int_a^b (h - \varphi_{n_0}) < \varepsilon$. Basta tomar $f_1 = g - \varphi_{n_0}$ e $f_2 = h - \varphi_{n_0}$. ■

O Teorema de Beppo Levi generaliza à classe $L[a, b]$ o resultado estabelecido no Corolário 3.7. Vejamos como fica o resultado.

Teorema 3.1. (*Teorema de Beppo Levi*) *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uma série em $L[a, b]$ de termos não-negativos. Se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n f_i \leq M,$$

então $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge q.s em $[a, b]$ para $f \in L[a, b]$ e, além disso,

$$\int_a^b f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n.$$

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, como $f_n \in L[a, b]$, o Lema 3.1 nos dá f_{n1} e f_{n2} pertencentes a $L^+[a, b]$ tais que $f_n = f_{n1} - f_{n2}$, $f_{n2} \geq 0$ e $\int_a^b f_{n2} < 1/2^n$. Então

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n f_{i2} = \sum_{i=1}^n \int_a^b f_{i2} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1. \quad (3.14)$$

Em virtude do Corolário 3.7, $\sum f_{n2}$ converge q.s em $[a, b]$ para $f_2 \in L^+[a, b]$, a qual satisfaz

$$\int_a^b f_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_{n2}. \quad (3.15)$$

Por outro lado, como $f_n, f_{n2} \geq 0$, concluímos que $f_{n1} = f_n + f_{n2} \geq 0$, isto ocorrendo para

²⁴Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Beppolevi.jpg#/media/File:Beppolevi.jpg>. Acesso em: 19 Out. 2015.

todo $n \in \mathbb{N}$. Daí e de (3.14),

$$\begin{aligned} \int_a^b \sum_{i=1}^n f_{i1} &= \int_a^b \sum_{i=1}^n (f_i + f_{i2}) = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n f_i + \sum_{i=1}^n f_{i2} \right) = \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^n f_i + \int_a^b \sum_{i=1}^n f_{i2} \leq M + 1, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Novamente, do Corolário 3.7, segue-se que $\sum f_{n1}$ converge q.s em $[a, b]$ para $f_1 \in L^+[a, b]$, a qual satisfaz

$$\int_a^b f_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_{n1}. \quad (3.16)$$

Assim, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n1} - f_{n2}) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n1} - \sum_{n=1}^{\infty} f_{n2} = f_1 - f_2$$

q.s em $[a, b]$. Portanto, pondo $f = \sum f_n$, segue-se que $f \in L[a, b]$ e, além disso, pela definição de integral, de (3.15) e de (3.16), temos:

$$\begin{aligned} \int_a^b f &= \int_a^b f_1 - \int_a^b f_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_{n1} - \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_{n2} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_{n1} - \int_a^b f_{n2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n. \end{aligned}$$

Isto completa a demonstração. ■

Com consequência deste resultado, temos o

Teorema 3.2. (*Teorema da Convergência Monótona*) *Seja (f_n) uma sequência não-decrescente em $L[a, b]$. Se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$\int_a^b f_n \leq M,$$

então (f_n) converge q.s em $[a, b]$ para $f \in L[a, b]$ e, além disso,

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n.$$

Demonstração. Por conveniência, tomemos $f_0 = 0$. Então podemos escrever $f_n = \sum_{i=1}^n (f_i - f_{i-1})$. Daí, $\int_a^b \sum_{i=1}^n (f_i - f_{i-1}) = \int_a^b f_n \leq M$. Pelo Teorema de Beppo Levi, $f_n = \sum_{i=1}^n (f_i - f_{i-1}) \rightarrow f \in L[a, b]$ q.s em $[a, b]$ e

$$\begin{aligned} \int_a^b f &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b (f_n - f_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_a^b (f_i - f_{i-1}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \sum_{i=1}^n (f_i - f_{i-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n, \end{aligned}$$

como queríamos. ■

O próximo corolário segue-se de imediato. De fato, basta aplicar o resultado anterior à sequência $(-f_n)$ e utilizar a Proposição 3.8 nas contas.

Corolário 3.8. *Seja (f_n) uma sequência não-crescente em $L[a, b]$. Se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$\int_a^b f_n \geq M,$$

então (f_n) converge q.s em $[a, b]$ para $f \in L[a, b]$ e, além disso,

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n.$$

Obtemos assim uma condição muito menos restritiva do que convergência uniforme para assegurar a passagem do limite sob a integral. Observe que a sequência exibida no Exemplo 2.9 do capítulo anterior satisfaz as condições do Teorema da Convergência Monótona, de modo que podemos realizar a inversão do limite naquele caso.

O próximo teorema, também frequentemente referido como Teorema de Beppo Levi, será de grande utilidade adiante.

Teorema 3.3. *Seja $\sum f_n$ uma série de funções em $L[a, b]$. Se $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |f_n|$ converge, então $\sum f_n$ converge q.s em $[a, b]$ para $f \in L[a, b]$ e, além disso,*

$$\int_a^b f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n.$$

Demonstração. Seja $M = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |f_n|$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, como $0 \leq f_n^+ \leq f_n^+ + f_n^- = |f_n|$, segue-se que $\int_a^b f_n^+ \leq \int_a^b |f_n|$. Daí, para cada $k \in \mathbb{N}$ fixado, temos

$$\int_a^b \sum_{i=1}^k f_i^+ = \sum_{i=1}^k \int_a^b f_i^+ \leq \sum_{i=1}^k \int_a^b |f_i| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |f_n| = M.$$

Pelo Teorema de Beppo Levi, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^+ \in L[a, b]$ e

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n^+. \quad (3.17)$$

De modo análogo, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^- \in L[a, b]$ e

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n^-. \quad (3.18)$$

Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n^+ - f_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} f_n^- \in L \quad (3.19)$$

e, pondo $f = \sum f_n$, de (3.17), (3.18) e (3.19) concluímos que

$$\begin{aligned} \int_a^b f &= \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} f_n^- \right) = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n^+ - \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n^- = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b (f_n^+ - f_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n, \end{aligned}$$

o que prova o teorema. ■

Terminamos esta seção com mais uma aplicação do Teorema de Beppo Levi.

Proposição 3.12. *Seja $f \in L[a, b]$. Então $\int_a^b |f| = 0$ se, e somente se, $f = 0$ q.s em $[a, b]$.*

Demonstração. Supondo que $\int_a^b |f| = 0$, seja (f_n) dada por $f_n = |f| \in L[a, b]$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então (f_n) é de termos não-negativos em $L[a, b]$ e, além disso,

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n f_i = \sum_{i=1}^n \int_a^b |f| = \sum_{i=1}^n 0 = 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema de Beppo Levi, $\sum f_n$ converge q.s em $[a, b]$, donde $|f(x)| = \lim f_n = 0$ q.s em $[a, b]$. Isto prova que $f = 0$ quase sempre em $[a, b]$. A outra parte é imediata (pelo Corolário 3.5). ■

3.6 Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

Nesta seção obteremos um poderoso teorema de convergência, o qual nos dará condições mínimas para garantir a passagem do limite sob a integral. Com ele e os teoremas da seção anterior completaremos a resposta da integral de Lebesgue para os problemas relacionados às limitações operacionais da integral de Riemann, apontados na Seção 2.6.2 do capítulo anterior. Antes, façamos algumas observações que motivarão o teorema.

A exigência da monotonicidade da sequência (f_n) no Teorema da Convergência Monótona pode ser muitas vezes inconveniente. Contudo, não podemos simplesmente eliminar esta exigência. Os próximos três exemplos mostram algumas situações.

Exemplo 3.13. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = nx^n$. Ora, se $x \in [0, 1)$, então nx^n é o termo geral de uma série que converge pelo Teste da Razão. Assim, $\lim f_n = 0$ quase sempre em $[0, 1]$. Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 nx^n dx = \left. \frac{nx^{n+1}}{n+1} \right|_0^1 = \frac{n}{n+1}.$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0 = \int_0^1 0 dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

Observe que (f_n) não é monótona, de modo que o resultado estabelecido pelo Teorema da Convergência Monótona não é violado. Além disso, (f_n) não é limitada. De fato, dado $A > 0$, seja n o menor inteiro maior do que $A + 1$. Como

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} nx^n = n \cdot 1^n = n \geq A + 1 > A,$$

existe $x \in [0, 1]$ tal que $f_n(x) = nx^n > A$. ♦

Exemplo 3.14. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere a função $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g_n(x) = n^2 x^n$. De modo análogo ao exemplo anterior concluímos que $\lim g_n = 0$ quase sempre em $[0, 1]$. Além disso, dado $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\int_0^1 g_n(x) dx = \int_0^1 n^2 x^n dx = \left. \frac{n^2 x^{n+1}}{n+1} \right|_0^1 = n \frac{n}{n+1},$$

donde $\lim \int_0^1 g_n(x)dx = +\infty \cdot 1 = +\infty$. Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)dx.$$

Novamente, um cálculo simples mostra que (g_n) não é monótona nem limitada. $\blacklozenge$

Exemplo 3.15. Por fim, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $h_n : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h_n(x) = \begin{cases} n \operatorname{sen}(nx) & \text{se } 0 \leq x \leq \pi/n, \\ 0 & \text{se } \pi/n \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Então claramente $\lim h_n = 0$ q.s em $[a, b]$. Além disso, dado $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^\pi h_n(x)dx = \int_0^{\pi/n} n \operatorname{sen}(nx)dx = -\cos(nx)|_0^{\pi/n} = 2.$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi h_n(x)dx = 2 \neq 0 = \int_0^\pi \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x)dx.$$

Novamente, (h_n) não é monótona nem limitada. $\blacklozenge$

De modo a obter um teorema de convergência com condições mais permissíveis, precisamos remover a exigência de monotonicidade. Por outro lado, os Exemplos 3.13, 3.14 e 3.15 nos mostram que não podemos simplesmente eliminar esta condição. É notável, no entanto, que em nenhum destes exemplos a sequência considerada é limitada quase sempre no intervalo $[a, b]$. Em 1904, Lebesgue descobriu que exigir sequências limitadas e convergentes (quase sempre) é suficiente para garantir a passagem do limite sob a integral. Mais geralmente, só é necessário “dominar” a sequência por outra função em $L[a, b]$. Este fato é considerado o *Teorema Fundamental da Integral de Lebesgue*. Aqui, como é mais comum, o nomearemos de *Teorema da Convergência Dominada*. Antes de demonstrá-lo, o seguinte lema nos será de grande utilidade.

Lema 3.2. *Seja (f_n) uma sequência de funções em $L[a, b]$ tal que $\lim f_n = f$ q.s em $[a, b]$. Se existe uma função $F \in L[a, b]$ que domina (f_n) quase sempre em $[a, b]$, isto é, tal que*

$$|f_n(x)| \leq F(x) \quad \text{q.s em } [a, b],$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, então as sequências (g_n) e (h_n) definidas por

$$g_n = \sup\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \dots\} \quad \text{e} \quad h_n = \inf\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \dots\},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, têm seus termos em $L[a, b]$ e convergem quase sempre para f em $[a, b]$. Consequentemente, $f \in L[a, b]$.

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos as sequências $(g_{nk})_{k \in \mathbb{N}}$ e $(h_{nk})_{k \in \mathbb{N}}$ pondo

$$g_{nk} = \max\{f_n, f_{n+1}, \dots, f_{n+k}\} \quad \text{e} \quad h_{nk} = \min\{f_n, f_{n+1}, \dots, f_{n+k}\},$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Então as sequências $(g_{nk})_{k \in \mathbb{N}}$ e $(h_{nk})_{k \in \mathbb{N}}$ são não-decrescente e não-crescente, respectivamente, e, como $g_{nk} \leq F$ e $h_{nk} \geq -F$ para todo $k \in \mathbb{N}$, o Corolário 3.5 nos dá

$$\int_a^b g_{nk} \leq \int_a^b F \quad \text{e} \quad \int_a^b h_{nk} \geq \int_a^b -F.$$

Do Teorema da Convergência Monótona e de seu Corolário 3.8, $(g_{nk})_{k \in \mathbb{N}}$ e $(h_{nk})_{k \in \mathbb{N}}$ convergem q.s em $[a, b]$ para funções em $L[a, b]$. Como $\lim_{k \rightarrow \infty} g_{nk} = g_n$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} h_{nk} = h_n$, segue-se que $g_n, h_n \in L[a, b]$. Por outro lado, a menos de um conjunto de medida nula, vale

$$-F \leq f_n \leq \sup\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \dots\} = g_n \quad \text{e} \quad h_n = \inf\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \dots\} \leq f_n \leq F,$$

donde

$$\int_a^b -F \leq \int_a^b g_n \quad \text{e} \quad \int_a^b h_n \leq \int_a^b F.$$

Além disso, (g_n) e (h_n) convergem para $f = \lim f_n$ quase sempre em $[a, b]$. Com efeito, dados $x \in [a, b]$ tal que $\lim f_n(x) = f(x)$ e $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow f(x) - \frac{\varepsilon}{2} < f_n(x) < f(x) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para todo $n > n_0$, de $f_n(x) < f(x) + \varepsilon/2$, segue-se que $g_n(x) \leq f(x) + \varepsilon/2 < f(x) + \varepsilon$. Portanto,

$$n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow f(x) - \varepsilon < f(x) - \frac{\varepsilon}{2} < f_n(x) \leq g_n(x) \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{2} < f(x) + \varepsilon,$$

isto é, $\lim g_n(x) = f(x)$. Concluimos que $\lim g_n = f$ quase sempre em $[a, b]$. Analogamente mostra-se que $\lim h_n = f$ quase sempre em $[a, b]$.

Assim, (g_n) e (h_n) são sequências em $L[a, b]$, a primeira não-crescente e a segunda não-decrescente, cujas sequências das integrais são limitadas inferiormente e superiormente por $\int_a^b -F$ e $\int_a^b F$, respectivamente, e ambas convergem quase sempre em $[a, b]$ para f . Novamente, do Teorema da Convergência Monótona e de seu Corolário 3.8, $f \in L[a, b]$, como queríamos. ■

Teorema 3.4. (*Teorema da Convergência Dominada*) *Seja (f_n) uma sequência de funções em $L[a, b]$ tal que $\lim f_n = f$ q.s em $[a, b]$. Se existe uma função $F \in L[a, b]$ tal que*

$$|f_n(x)| \leq F(x) \quad \text{q.s em } [a, b],$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, então $f \in L[a, b]$ e

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n.$$

Em resumo, vale $\int_a^b \lim f_n = \lim \int_a^b f_n$ desde que (f_n) seja uma sequência de funções $f_n \in L[a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, dominada em $L[a, b]$ e que converge quase sempre em $[a, b]$.

Demonstração. Consideremos as sequências (g_n) e (h_n) definidas por

$$g_n = \sup\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \dots\} \quad \text{e} \quad h_n = \inf\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \dots\},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Em virtude do Lema 3.2 e do Teorema da Convergência Monótona e seu Corolário 3.8, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b h_n = \int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n.$$

Ora, como $h_n \leq f_n \leq g_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue-se do Corolário 3.5 que

$$\int_a^b h_n \leq \int_a^b f_n \leq \int_a^b g_n$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema do Sanduíche, concluímos que

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n,$$

como queríamos demonstrar. ■

Como um caso particular, temos o

Corolário 3.9. *(Teorema da Convergência Limitada) Se (f_n) é uma sequência em $L[a, b]$ que converge q.s em $[a, b]$ para a função f e existe $M > 0$ tal que $|f_n(x)| < M$ quase sempre em $[a, b]$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $f \in L[a, b]$ e vale*

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n.$$

Em resumo, toda sequência (f_n) em $L[a, b]$, limitada uniformemente e que converge q.s é tal que $\lim \int_a^b f_n = \int_a^b \lim f_n$.

Completamos, assim, a exibição dos teoremas de convergência, os quais tornam mais permissível a integração termo-a-termo de uma sequência de funções em comparação à integração de Cauchy-Riemann. Observemos que o Teorema da Convergência Dominada foi aqui obtido a partir do Teorema da Convergência Monótona. Contudo, Lebesgue o demonstrou antes, em 1904 e, por isso, se utilizou de outros argumentos para garantir sua validade.

Vejamos duas aplicações do Teorema 3.4. Primeiramente, observemos que o Teorema da Convergência Limitada não é válido para a integral de Riemann (vide Exemplo 2.9 do capítulo anterior), mas é possível obter condições (mais restritivas, claro) que garantem a integração termo-a-termo. É o caso do próximo resultado, demonstrado pelo matemático italiano Cesare Arzelà (1847-1912) em 1885, no artigo *Sulla integrazione per serie*, e que pode ser obtido como consequência imediata do Corolário 3.9.

Corolário 3.10. *(Teorema de Arzelà) Se (f_n) é uma sequência de funções Riemann-integráveis em $[a, b]$ que converge para uma função integrável à Riemann f quase sempre em $[a, b]$ e existe $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ quase sempre em $[a, b]$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então*

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n.$$

Terminamos esta seção com um importante resultado, demonstrado em 1906 pelo matemático francês Pierre Fatou (1878-1929) em seu *Séries trigonométriques et séries de Taylor*, útil à teoria da Análise de Fourier.

Teorema 3.5. *(Lema de Fatou) Se (f_n) é uma sequência em $L[a, b]$ que converge q.s em $[a, b]$ para a função f e existe $M > 0$ tal que $\int_a^b f_n \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $f \in L[a, b]$ e $\int_a^b f \leq M$.*

Demonstração. Analogamente ao Lema 3.2, seja (h_n) onde, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$h_n = \inf\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \dots\}.$$

Então $\lim h_n = f$ q.s em $[a, b]$ e, como $h_n \leq f_n$, temos

$$\int_a^b h_n \leq \int_a^b f_n \leq M,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema da Convergência Monótona segue-se que $f \in L[a, b]$ e

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b h_n \leq M,$$

o que completa a demonstração. ■

3.7 O espaço $L^1[a, b]$

Nesta seção, descreveremos o espaço $L^1[a, b]$ e resolveremos o problema da completude levantado na Seção 2.6.4 do capítulo anterior. Será importante introduzir os conceitos de espaço vetorial normado e espaço de Banach. Para um tratamento fundamental dos espaços vetoriais, recomendamos a leitura de Ulhoa (2013) ou Hoffman e Kunze (1971).

Seja E um espaço vetorial. Uma *norma* para E é uma função $\mathcal{N} : E \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $\mathcal{N}(v) \geq 0$ para todo vetor $v \in E$;
- (ii) $\mathcal{N}(v) = 0$ se, e somente se, $v = 0$ (vetor nulo);
- (iii) $\mathcal{N}(\alpha v) = |\alpha| \mathcal{N}(v)$, para todos $v \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$;
- (iv) $\mathcal{N}(u + v) \leq \mathcal{N}(u) + \mathcal{N}(v)$, para todos $u, v \in E$.

Quando todos os itens acima são satisfeitos com exceção de (ii), dizemos $\mathcal{N}$ é uma *seminorma* (ou seja, uma seminorma permite atribuir “comprimento” nulo a vetores não-nulos). Um espaço vetorial E munido de uma norma (ou seminorma) é dito um espaço vetorial *normado* (ou *seminormado*).

Dado um espaço vetorial normado E , denotaremos a norma $\mathcal{N}(v)$ de um vetor $v \in E$ por $\|v\|$. Observe que todo espaço vetorial normado torna-se naturalmente um espaço métrico ao introduzirmos a métrica $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(u, v) = \|u - v\|$.

Um espaço vetorial normado E é dito um *espaço de Banach* se toda sequência de Cauchy em E converge com respeito à *métrica natural* $d(u, v) = \|u - v\|$, isto é, se o espaço métrico (E, d) é completo.

Concluimos da Proposição 3.8 que o conjunto $L[a, b]$ é um espaço vetorial. Dadas $f, g \in L[a, b]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, definamos a função $\|\cdot\| : L[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pondo

$$\|f\| = \int_a^b |f|. \tag{3.20}$$

Novamente da Proposição 3.8 e de seu Corolário 3.5, segue-se que

- (a) $\|f\| \geq 0$;
- (b) $\|f\| = 0$ se, e somente se, $f = 0$ quase sempre em $[a, b]$;
- (c) $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$;
- (d) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Infelizmente $\|\cdot\|$ não faz de $L[a, b]$ um espaço normado, pois o item (ii) da definição não é satisfeito. Contudo, se considerarmos que duas funções f, g que diferem apenas em um conjunto de medida nula são “as mesmas” funções, podemos contornar este problema. Neste caso, deixamos de considerar funções e passamos a considerar classes infinitas de funções, cada uma das quais possuindo elementos (*representantes*) iguais a menos de um conjunto de medida zero. Duas funções de uma mesma classe serão denominadas *funções equivalentes*. Denotando o conjunto de todas estas classes por $L^1[a, b]$ (ou simplesmente L^1 , se o intervalo estiver subentendido ou não for interessante) obtemos um espaço vetorial normado pela norma (3.20) definida acima, a qual denominaremos *norma- L^1* . A métrica natural $d(u, v) = \|u - v\|$ definida a partir desta norma, isto é, dada por

$$d(f, g) = \int_a^b |f - g|,$$

será denominada *métrica- L^1* .

Malgrado a repetição, queremos tornar a frisar que os elementos de $L^1[a, b]$ são *classes infinitas* de funções equivalentes. Como já comentamos, a teoria da integração de Lebesgue se passa a menos de um conjunto de medida nula, e isto é explicado pelo Corolário 3.5. Adiante, por simplicidade, não faremos distinção entre os elementos de $L[a, b]$ e os de $L^1[a, b]$, embora esta diferença exista no sentido que acabamos de descrever.

O principal teorema desta seção teve uma forma particular demonstrada independentemente por Riesz e Ernst Fischer (1875-1954). No ano de 1910 em seu artigo *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen*, Riesz generalizou o resultado, mostrando a completude dos espaços L^p para $1 \leq p < +\infty$, onde $L^p = \{f; |f|^p \in L\}$. A versão deste resultado que mostraremos a seguir garante que o espaço $L^1[a, b]$ das funções Lebesgue-integráveis munido com a métrica- L^1 é completo, o que resolve os problemas apontados na Seção 2.6.4 do capítulo anterior.

Teorema 3.6. (*Teorema de Riesz-Fischer*) *O espaço $L^1[a, b]$ munido com a norma- L^1 é um espaço de Banach.*

Demonstração. Já vimos que $L^1[a, b]$ é um espaço vetorial normado. Então basta mostrar que é completo sob a métrica- L^1 . Para isto, seja (f_n) uma sequência de Cauchy em L^1 . Queremos mostrar que (f_n) converge para uma função em f sob a métrica- L^1 .

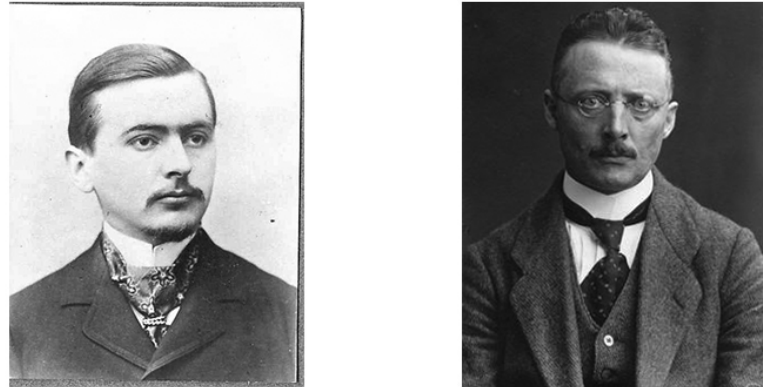
Tomando $\varepsilon_1 = 1/2$ na definição, escolhemos $n_1 > n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_1 \Rightarrow \|f_n - f_{n_1}\| = d(f_n, f_{n_1}) < \frac{1}{2}.$$

Supondo obtido $n_{k-1} > n_{k-2}$ tal que

$$n > n_{k-1} \Rightarrow \|f_n - f_{n_{k-1}}\| = d(f_n, f_{n_{k-1}}) < \frac{1}{2^{k-1}},$$

Figura 3.8: Pierre Joseph Louis Fatou (1878-1929) e Ernst Sigismund Fischer (1875-1954).



Fontes: Domínio Público e arquivos de P. Roquette, Heidelberg e Clark Kimberling, imagem de Ursula Fischer, filha de Ernst Fischer.²⁵

tomamos $\varepsilon_k = 1/2^k$ na definição e escolhemos $n_k > n_{k-1}$ (e $n_k > n_0$) tal que

$$n > n_k \Rightarrow \|f_n - f_{n_k}\| = d(f_n, f_{n_k}) < \frac{1}{2^k}. \quad (3.21)$$

Desta forma, obtemos uma subsequência $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de (f_n) que satisfaz,

$$\|f_n - f_{n_k}\| \longrightarrow 0, \quad (3.22)$$

se $k \rightarrow \infty$ e $n \rightarrow \infty$. Além do mais, em virtude de (3.21) e como $n_{k+1} > n_k$, $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é tal que

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}, \quad (3.23)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$\int_a^b |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| < \frac{1}{2^k}. \quad (3.24)$$

Se, por conveniência, considerarmos $f_{n_0} = 0$, segue-se de (3.24) que é convergente a série $\sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$. Pelo Teorema 3.3,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f_{n_k} - f_{n_0}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}$$

converge quase sempre em $[a, b]$ para $f \in L[a, b]$. Daí, temos

$$\sum_{k=p}^{\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f_{n_k} - f_{n_p}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k} - f_{n_p} = f - f_{n_p} \quad (3.25)$$

quase sempre em $[a, b]$. Por outro lado, para quaisquer $p, m \in \mathbb{N}$, com $m > p$,

$$\int_a^b \sum_{k=p}^m |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| = \sum_{k=p}^m \int_a^b |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|.$$

²⁵Imagens ordenadamente disponíveis em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pierre_Fatou.jpg e http://owpodb.mfo.de/detail?photo_id=9271. Acesso em: 19 Out. 2015.

Assim, pelo Teorema de Beppo Levi, vale

$$\int_a^b \sum_{k=p}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| = \sum_{k=p}^{\infty} \int_a^b |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|. \quad (3.26)$$

Além disso, de (3.25),

$$|f - f_{n_p}| = \left| \sum_{k=p}^{\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) \right| \leq \sum_{k=p}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \quad (3.27)$$

quase sempre em $[a, b]$. Portanto,

$$\begin{aligned} \|f - f_{n_p}\| &= \int_a^b |f - f_{n_p}| && \text{(Pela definição da norma)} \\ &\leq \int_a^b \sum_{k=p}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| && \text{(De (3.27))} \\ &= \sum_{k=p}^{\infty} \int_a^b |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| && \text{(De (3.26))} \\ &= \sum_{k=p}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| && \text{(Pela definição da norma)} \\ &\leq \sum_{k=p}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{p-1}}. && \text{(De (3.23))} \end{aligned}$$

Ou seja, $\|f - f_{n_p}\| \rightarrow 0$ se $p \rightarrow \infty$. Daí e de (3.22), dado $\varepsilon > 0$, segue-se que

$$d(f, f_n) = \|f - f_n\| \leq \|f - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - f_n\| < \varepsilon$$

desde que k e n sejam suficientemente grandes. Consequentemente, $d(f, f_n) \rightarrow 0$ se $n \rightarrow \infty$, isto é, f_n converge para $f \in L[a, b]$. ■

Sendo ele mesmo completo, o completamento de $\mathcal{C}[a, b]$ com a métrica- L^1 está contido em $L^1[a, b]$. Isto resolve o problema presente na teoria da integração de Riemann apontado na Seção 2.6.4 do Capítulo 2.

As duas próximas seções confirmarão a necessidade de expandir a integral de Riemann com outras teorias de integração.

3.7.1 Aprimorando a integral de Riemann por meio do conceito de funções equivalentes

Introduzimos na seção anterior o conceito de funções equivalentes.²⁶ Em vista deste conceito e da própria teoria da integração de Lebesgue, notamos que é possível melhorar a integral de Riemann sem sair dela. De fato, o conceito de medida nula e a integral que viemos desenvolvendo até agora nos mostra que conjuntos de medida nula não exercem influência na integração, de modo que este tipo de conjunto é completamente negligenciável quando queremos calcular a integral de alguma função.

²⁶Duas funções são equivalentes quando são idênticas a menos de um conjunto de medida nula.

Observando que o problema que originou o conjunto das funções tipo-Dirichlet²⁷ foi causado por conjuntos de medida nula, um modo de remediá-lo seria então definindo a integral sob classes de funções equivalentes. Nesta classe, podemos convencionar que a integral de Riemann de qualquer função é igual à integral de um de seus representantes que seja Riemann-integrável. Vamos formalizar esta ideia.

Dada $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$, denotaremos por $\bar{f}$ o conjunto formado por todas as funções equivalentes a f em $[a, b]$, ou seja,

$$\bar{f} = \{g \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}); g = f \text{ q.s em } [a, b]\}.$$

Denominaremos este conjunto por *classe de equivalência* de f . Se existe ao menos uma função Riemann-integrável $g \in \bar{f}$, dizemos que $\bar{f}$ é uma *classe integrável* (ou *classe de funções integráveis*). Neste caso, definimos a *integral de Riemann* de qualquer função $h \in \bar{f}$ em $[a, b]$ por

$$\int_a^b h = \int_a^b g.$$

Na igualdade acima, a integral à esquerda é um novo sentido, enquanto que a integral da direita pode ser calculada com a definição clássica. O conjunto das funções cuja classe contém alguma função integrável no sentido clássico será denotado por $\bar{\mathcal{R}}[a, b]$.

De posse deste conceito, observamos que a função de Dirichlet em $[0, 1]$, a qual assume o valor 0 nos pontos irracionais e 1 nos pontos racionais, pertence à classe da função nula, a qual é Riemann-integrável. Assim, a integral de Riemann desta função, pelo que foi exposto acima, existe e é igual a 0. De modo análogo, observando o Exemplo 2.7 do capítulo anterior, vemos que $f \in \bar{g}$. Como g é contínua (e, portanto, Riemann-integrável), pelo conceito definido acima, a integral de Riemann de f é

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

Assim, vemos que toda a classe das função tipo-Dirichlet pode ser integrada em um novo conceito baseado inteiramente na integral de Riemann clássica, isto é, $\mathcal{D}[a, b] \subset \bar{\mathcal{R}}[a, b]$. Tudo o que precisamos para realizar esta extensão foi do conceito de conjunto de medida nula, o qual é simples de se entender, como vimos na Seção 2.4. Com isso, pudemos aumentar as funções integráveis no sentido clássico do cálculo, de modo a resolver **parcialmente**²⁸ o problema da escassez sem sair da integral de Riemann. Acreditamos que este procedimento possa ser implementado em cursos de Cálculo Integral ou de introdução à Análise Real.

Contudo, mesmo com essa modificação, $\bar{\mathcal{R}}[a, b]$ ainda não é o complemento de $\mathcal{C}[a, b]$. O Exemplo 2.14 do capítulo anterior é prova disto. Mais ainda, como veremos na próxima seção, o desenvolvimento de uma integral de Lebesgue também é necessário do ponto de vista da escassez de funções integráveis a Riemann, pois ainda existem muitas funções integrável no sentido de Lebesgue que não são equivalentes a qualquer função Riemann-integrável.

3.7.2 A classe $L[a, b]$ é muito maior do que $\bar{\mathcal{R}}[a, b]$

Um exemplo simples de função em $L[a, b]$ que não pertence a $\bar{\mathcal{R}}[a, b]$ é dado pela função $f[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/\sqrt{x}$ se $x \in (0, 1]$ e $f(0) = 0$. Qualquer função em $\bar{f}$ é

²⁷Cf. Exemplo 2.7 do capítulo anterior.

²⁸Na próxima seção veremos que o problema é maior do que isso.

ilimitada e, portanto, não é Riemann integrável. Porém, como sabemos, podemos integrar f através de uma integral imprópria. Contudo, mesmo assim, existem função limitadas em $L[a, b]$ que não pertencem a $\mathcal{R}[a, b]$. É o que nos mostra o próximo exemplo.

Exemplo 3.16. Seja $\{r_1, r_2, r_3, \dots\}$ uma enumeração dos racionais no intervalo $(0, 1)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja I_n um intervalo aberto em $(0, 1)$ contendo r_n e de amplitude $1/2^{n+1}$. Pondo $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, segue-se que U é aberto, denso em $[0, 1]$, e que os conjuntos U e $[0, 1] \setminus U$ não têm medida nula. Considere a função característica $\mathcal{X}_U$ de U em $[0, 1]$. Afirmamos que $\mathcal{X}_U$ é Lebesgue-integrável. De fato, basta observar que a sequência de funções integráveis (f_n) dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in I_k, \text{ para algum } k \in \{1, 2, \dots, n\}, \\ 0 & \text{nos demais pontos.} \end{cases}$$

converge para $\mathcal{X}_U$ e que $|f_n| \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Aplicando o Teorema da Convergência Dominada concluímos que $\mathcal{X}_U$ é integrável.

Agora, seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f = \mathcal{X}_U$ q.s em $[0, 1]$. Afirmamos que f não é integrável a Riemann. De fato, seja $D = \{x \in [0, 1]; f(x) \neq \mathcal{X}_U(x)\}$. Então $m(D) = 0$. Observemos que, como U é denso em $[a, b]$, o conjunto $U \setminus D$ também é. Com efeito, considere $(a, b) \subset [0, 1]$. Então existe $r_k \in (a, b)$. Daí, ou $I_k \subset (a, b)$, ou $r_k \in (c, d) \subset I_k$ com $(c, d) \subset (a, b)$, pois ambos I_k e (a, b) são abertos. No primeiro caso, não podemos ter $I_k \subset D$ porque $m(D) = 0$, então existe $x \in I_k \subset U$ que não pertence a D . No segundo, não podemos ter $(c, d) \subset D$ pela mesma razão: $m(D) = 0$. Então existe $x \in (c, d) \subset U$ que não pertence a D . Em ambos os casos, existe $x \in (a, b) \cap (U \setminus D)$, donde $U \setminus D$ é denso em $[0, 1]$. Segue-se daí que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in U \setminus D, \\ 0 & \text{se } x \in ([0, 1] \setminus U) \setminus D. \end{cases}$$

Ou seja, f é descontínua em todos os pontos de $([0, 1] \setminus U) \setminus D$, o qual não tem medida nula. Pelo Teorema de Lebesgue, f não é Riemann-integrável, como queríamos. ♦

É justificável, portanto, desenvolver uma teoria que torne mais extensa o conjunto das funções integráveis. Na próxima seção veremos que é justificável estender também a classe das funções Lebesgue integráveis de modo a obter uma generalização da integral de Riemann mais eficiente e, principalmente, um Teorema Fundamental do Cálculo mais forte.

3.8 Deficiências da integral de Lebesgue

Na Seção 2.6 do capítulo anterior apresentamos algumas deficiências da integral de Riemann, a qual motivaram o desenvolvimento de uma teoria de integração mais abrangente. Muitas dos problemas apresentados foram solucionados pela integral de Lebesgue que desenvolvemos neste capítulo. Porém, ainda remanescem aspectos deficientes nesta teoria, alguns dos quais permanecerão desta forma seja qual for a generalização da integral de Riemann que se desenvolva. Outros, porém, encontram soluções em teorias ainda mais gerais do que as de Lebesgue. Apresentaremos alguns destes problemas nesta seção.

3.8.1 Integrais impróprias

Retomemos a discussão sobre integrais impróprias discutidas no capítulo anterior. Vimos que, ao introduzir novas teorias, o conceito de integração imprópria é modificado. Na integral de Cauchy eram impróprias integrais de funções descontínuas ou sob intervalos ilimitados. Na integral de Riemann, eram impróprias as integrais de funções ilimitadas ou, também, sob intervalos ilimitados. Na integral de Lebesgue, no entanto, não existe a restrição para que a função a ser integrada seja limitada. Sendo assim, nesta teoria, permanecem impróprias apenas as integrais sobre intervalos ilimitados.

Assim como antes, definiremos a *integral imprópria* de f em $[a, +\infty)$ pela expressão

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f,$$

quando este limite existe. Neste caso, dizemos que $\int_a^{+\infty} f$ converge. Se $\int_a^{+\infty} |f|$ for convergente, dizemos que $\int_a^{+\infty} f$ converge absolutamente.

Na integral de Riemann imprópria em particular, alguns resultados similares aos de séries são válidos. Por exemplo, toda integral que converge absolutamente é convergente.²⁹ Outro fato útil é o *Critério de Comparação*, isto é, se $f, g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas, $\int_a^{+\infty} g$ converge e existe $k > 0$ tal que $|f(x)| \leq k \cdot g(x)$ para todo $x \in [a, +\infty)$, então $\int_a^{+\infty} f$ converge absolutamente.³⁰ No que segue, utilizaremos estes resultados. O leitor poderá encontrar demonstrações e mais detalhes sobre estas propriedades na bibliografia já citada.

Vimos na Proposição 3.5 que toda função integrável “propriamente” à Riemann é, também, integrável à Lebesgue, e as integrais coincidem. Infelizmente, o mesmo não vale para integrais impróprias. De fato, a importante *integral de Dirichlet*

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx$$

não existe no sentido de Lebesgue, embora convirja através da integral de Riemann. É o que nos mostra o próximo exemplo.

Exemplo 3.17. Embora a integral imprópria

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{\text{sen}(x)}{x} dx \quad (3.28)$$

convirja, o mesmo não podemos dizer de

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{\text{sen}(x)}{x} dx. \quad (3.29)$$

Para demonstrar este fato, basta considerar as integrais num intervalo da forma $[a, +\infty)$ com $a > 0$, visto que a função $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$, para $x \neq 0$, e $f(0) = 1$ é contínua (e, portanto, integrável) em $[0, a]$.

²⁹Cf. Figueiredo (2013, p. 194) ou Lima (2013a, p. 150).

³⁰Idem, ibidem.

Para cada $t > a$, utilizando integração por partes³¹, obtemos

$$\begin{aligned} \int_a^t \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx &= \left. \frac{-\cos(x)}{x} \right|_a^t + \int_a^t \frac{-\cos(x)}{x^2} dx \\ &= \frac{-\cos(t)}{t} - \frac{-\cos(a)}{a} - \int_a^t \frac{\cos(x)}{x^2} dx. \end{aligned}$$

Fazendo $t \rightarrow \infty$, temos $\frac{-\cos(t)}{t} \rightarrow 0$ e, além disso, como $\left| \frac{\cos(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$, a integral

$$\int_a^\infty \frac{\cos(x)}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t \frac{\cos(x)}{x^2} dx$$

converge pelo Critério de Comparação para integrais. Consequentemente (3.28) converge.

Por outro lado, se (3.29) convergisse, também convergiria $\int_0^\infty \left| \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right| dx$, em virtude de uma versão análoga da Proposição 3.7 para funções em $L[a, +\infty]$. Em particular, convergiria $\int_\pi^\infty \left| \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right| dx$. Ora, fixando $m \in \mathbb{N}$, vem:

$$\begin{aligned} \int_\pi^{(m+1)\pi} \left| \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right| dx &= \sum_{k=1}^m \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right| dx && \text{(Proposição 3.8)} \\ &= \sum_{k=1}^m \int_0^\pi \frac{|\operatorname{sen}(t + k\pi)|}{t + k\pi} dt && \text{(fazendo a mudança } x = t + k\pi) \\ &= \sum_{k=1}^m \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}(t)}{t + k\pi} dt && (|\operatorname{sen}(t + k\pi)| = \operatorname{sen}(t) \text{ em } [0, \pi]) \\ &\geq \sum_{k=1}^m \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen}(t) dt && \left(t \in [0, \pi] \Rightarrow \frac{1}{t + k\pi} \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^m \frac{1}{(k+1)} && \left(\int_0^\pi \operatorname{sen}(x) dx = -\cos(x)|_0^\pi = 2 \right). \end{aligned}$$

Fazendo $m \rightarrow \infty$, a divergência da série harmônica $\sum 1/(k+1)$ implica a divergência de $\int_\pi^\infty \left| \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right| dx$. Contradição. Portanto, (3.29) diverge. $\blacklozenge$

Não é difícil adequar a integral do exemplo anterior a um intervalo limitado.

Exemplo 3.18. Considere a integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x^2} \right) dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x^2} \right) dx.$$

Fazendo a mudança de variável $u = x^{-2}$, temos

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x^2} \right) dx = -\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} du,$$

a qual não converge no sentido de Lebesgue, mas converge sob a integral de Riemann imprópria, como vimos no Exemplo 3.17. $\blacklozenge$

³¹Cf. Figueiredo (2013, p. 180) ou Lima (2013a, p. 139).

Obtemos o resultado acima utilizando a contrapositiva da Proposição 3.7. O mesmo argumento nos diz que, em geral, qualquer integral de Riemann imprópria condicionalmente convergente (i.e., que converge, mas não em módulo) não é Lebesgue integrável.

Em contrapartida, não é difícil encontrar integrais impróprias que convergem sob a integral de Lebesgue mas não sob a integral de Riemann. Por exemplo, seja $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função característica dos racionais em $\mathbb{R}$. É imediato que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{X}_{\mathbb{Q}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \mathcal{X}_{\mathbb{Q}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} 0 = 0.$$

No entanto, visto que $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ não é Riemann integrável em $[-A, A]$ para todo $A > 0$, $\int_{-A}^A \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ não faz sentido.

Estes problemas serão solucionados no próximo capítulo, com a introdução de uma teoria de integração mais ampla.

3.8.2 Produto de funções

Vimos no capítulo anterior (veja o Exemplo 2.4) que o produto de funções integrável a Riemann ainda é integrável neste sentido. Ao passar para a integral de Lebesgue, entretanto, este resultado não mais é válido. De fato, a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/\sqrt{x}$ se $x \in (0, 1]$ e $f(0) = 0$ é integrável, mas o mesmo não ocorre com o produto $f \cdot f$, como vimos no Exemplo 3.10. Assim, ao passar para a classe $L[a, b]$, perdemos uma operação que era bem definida em $\mathcal{R}[a, b]$.

Este problema, infelizmente, se estende a qualquer generalização da integral de Riemann que seja capaz de integrar a função f definida acima. De fato, como observa-se em outros contextos, a divergência para $\pm\infty$ é “bem comportada”. Por exemplo, estudam-se no Cálculo propriedades de sequências ou funções cujo limite é infinito, o qual é tratado como um limite especial, que tem um comportamento previsível em contraste com os limites que não assumem um valor específico, finito ou infinito. É oportuno neste ponto introduzir o conjunto $\mathbb{R}^*$ dos *números reais estendidos*, dado por $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Muitos autores adotam este conjunto de “números”³² de modo a considerar este tipo de divergência como uma “convergência para $\pm\infty$ ”. Veja, por exemplo, Aliprantis e Owen (1998), McShane (1983) ou Rudin (1976). O fato é que a integração de Riemann (imprópria) atribui o “valor” $+\infty$ à integral em $[0, 1]$ da função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$ se $x \in (0, 1]$ e $f(0) = 0$. Suas **generalizações** consequentemente atribuirão o mesmo valor a suas integrais. Assim, independente da teoria de integração que generalize Riemann (como é o caso da integral de Henstock-Kurzweil que veremos no próximo capítulo), a integral de f em $[0, 1]$ será $+\infty$.

Em compensação, se admitirmos que pelo menos uma das funções é limitada, podemos garantir que o produto é integrável a Lebesgue. É o que afirma o próximo resultado.

Proposição 3.13. *Sejam $f, g \in L[a, b]$ com g limitada. Então $fg \in L[a, b]$.*

Demonstração. Pela Proposição 3.9, f e g são mensuráveis. Logo, fg e (portanto) $|fg|$ também são mensuráveis. Como g é limitada, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|g(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Daí, $|(fg)(x)| \leq |Mf(x)|$. Ora, $|Mf|$ é integrável em virtude da Proposição 3.7. Assim, pela Proposição 3.10, $|fg|$ é integrável. Por fim, em virtude do que vimos no Exemplo 3.12, fg é integrável. ■

³²Inclusive definindo operações aritméticas cujo sentido fundamenta-se em propriedades de sequências. Por exemplo: $(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$; $\pm\infty + x = \pm\infty$, para todo $x \in \mathbb{R}$; $\lambda(\pm\infty)$ é igual a $\pm\infty$ se $\lambda > 0$ e a $\mp\infty$ se $\lambda < 0$, dentre outras.

3.8.3 O Teorema Fundamental do Cálculo de Lebesgue

Encerraremos este capítulo apontando a deficiência mais grave da integral de Lebesgue, relacionada ao Teorema Fundamental do Cálculo. Para a teoria de Lebesgue, o TFC é enunciado como abaixo. Uma demonstração pode ser encontrada em Gordon (1994, p. 36).

Teorema 3.7. (*Teorema Fundamental do Cálculo de Lebesgue*) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável e f' é limitada, então

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'. \quad (3.30)$$

Um passo adiante foi dado em relação ao TFC-Riemann (Teorema 2.5 do capítulo anterior). Porém, ainda precisamos admitir que a derivada é limitada de modo a garantir que a relação (3.30) seja válida.³³ Infelizmente, existem (muitas) derivadas não integráveis a Lebesgue.

Exemplo 3.19. A função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x^2}\right) & \text{se } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

é derivável em todo ponto do intervalo $[0, 1]$, mas f' não é integrável a Lebesgue. Uma justificativa pode ser encontrada em Gordon (1994, p. 107). ♦

O método de Stieltjes também pode ser utilizado de modo a obter-se a *integral de Lebesgue-Stieltjes*. Um tratamento completo pode ser encontrado em Saks (1937). Porém, embora haja benefício teórico, as deficiências apontadas acima remanescem. Estes problemas são resolvidos pela a *integral de Henstock-Kurzweil* que desenvolveremos no próximo capítulo.

³³Outras versões do TFC-Lebesgue estão disponíveis. Porém, em todas elas, derivabilidade não é suficiente. Ao menos uma das seguintes características precisa ser admitida: (1) f' é limitada; (2) f' é integrável; ou (3) f é *absolutamente contínua*. Mais detalhes podem encontrados em Chae (1995).

Integral de Henstock-Kurzweil e outras

“Eureka! Eureka!”

– Archimedes

Vimos no fim do capítulo anterior que a integral de Lebesgue ainda resguarda uma grave deficiência. De fato, nem sempre é possível resgatar uma função a partir de sua derivada, isto é, nem sempre é válida a *fórmula de Newton-Leibniz*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx \quad (4.1)$$

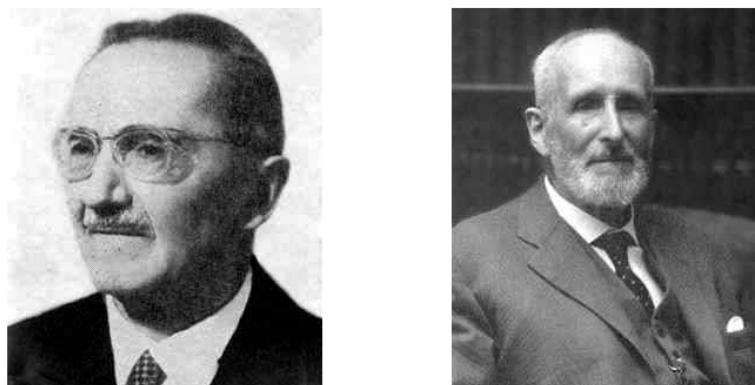
para uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivável em $[a, b]$.

Em 1912, o matemático francês Arnaud Denjoy (1884-1974) publicou o artigo *Une extension de l'intégrale de M. Lebesgue* no qual desenvolvia um processo de integração, denominado por ele de “totalização”, capaz de recuperar uma função a partir de sua derivada. Ou seja, a *integral de Denjoy*, como ficou conhecida, satisfaz a fórmula de Newton-Leibniz para toda função derivável. Mais ainda, toda função Lebesgue integrável é “totalizável” (Denjoy-integrável), de modo que a integral de Denjoy é uma generalização da integral de Lebesgue. Porém, o processo de totalização é bastante complicado. Poucos meses depois deste trabalho, ainda em 1912, o matemático russo Nikolai Luzin (1883-1950) publicou o artigo *Sur les propriétés de l'intégrale de M. Denjoy*, onde fazia uma relação entre o processo de totalização e o conceito de *continuidade absoluta generalizada*¹, tornando sua construção mais simples. É geralmente pelo método de Luzin que se aborda a teoria da integração de Denjoy.

A integral de Denjoy é tida como uma *integral não-absoluta*. Mostra-se que f é integrável a Lebesgue se, e somente se, f e $|f|$ são integráveis a Denjoy. Através do método de Luzin, é possível estabelecer diversas relações entre as funções Lebesgue-integráveis e as Denjoy-integráveis, o que torna estas integrais muito semelhantes. Isto ocorre porque a definição da integral de Denjoy age justamente sobre uma propriedade não verificada pela integral de Lebesgue. Desta forma, é possível estabelecer estas relações com mais facilidade. Um desenvolvimento completo da integral de Denjoy pelo método de Luzin pode ser encontrado em Gordon (1994, Capítulo 7). Neste texto o leitor também encontrará uma introdução às ideias originais de Denjoy, que utiliza números transfinitos, além de referências a textos que contém o desenvolvimento completo desta integral aos moldes originais.

¹Cf. Gordon (1994, p. 108)

Figura 4.1: Arnaud Denjoy (1884-1974) e Oskar Perron (1880-1975).



Fonte: Internet.²

Em 1914, o matemático alemão Oskar Perron (1880-1975) publicou o artigo *Über den Integralbegriff* onde desenvolvia uma outra extensão da integral de Lebesgue que satisfaz a fórmula de Newton-Leibniz para toda função derivável. Seus estudos foram independente dos de Denjoy e Luzin, mas o produto foi uma integral equivalente. O método utilizado por Perron foi muito diferente daquele de Denjoy ou de Luzin, e a *integral de Perron*, como ficou conhecida, é de modo mais direto uma generalização da integral de Lebesgue.

Era intenção de Perron generalizar uma propriedade da integral de Lebesgue. Sua integral é definida em termos de funções *majorantes* e *minorantes*³, e é produzida ao eliminar a necessidade destas funções serem absolutamente contínuas, o que é uma característica intrínseca da integração de Lebesgue⁴.

A integral que ambos (Denjoy e Perron) desenvolveram generaliza a integral de Lebesgue e satisfaz a fórmula (4.1) sem requerimentos adicionais (além da derivabilidade de f , claro). Finalmente todo o potencial da definição de Newton foi resgatado. Uma integral para a qual essa fórmula é satisfeita é útil em contextos de todos os níveis, desde o elementar ao avançado. Afinal, esta é uma fórmula fundamental para o Cálculo. Contudo, as integrais de Denjoy e Perron envolvem um nível elevadíssimo de abstração, de modo que fica muito difícil (se não impossível) apresentá-las em contextos elementares. Esta foi a principal motivação para que o matemático inglês Ralph Henstock (1923-2007) buscasse uma teoria de integração tão poderosa quanto a de Lebesgue e que pudesse ser apresentada desde os níveis iniciais da graduação.⁵ Henstock estudou este problema ferverosamente entre 1943 e 1958, o que resultou no artigo *Definitions of Riemann-type of the variational integrals* publicado em 1961, o qual apresenta um novo conceito de integral, baseado nas ideias de Cauchy-Riemann porém mais poderosa do que a integral de Lebesgue. Independentemente, o matemático tcheco Jaroslav Kurzweil (nascido em 1926, hoje com 89 anos) descobriu a mesma integral em seu estudo sobre equações diferenciais, publicando suas descobertas *Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter* em 1957, ainda antes de Henstock.

²Imagens ordenadamente disponíveis em: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/BigPictures/Denjoy.jpeg> e <http://www.math.qc.edu/~zakeri/mat542/men/Perron.jpeg>. Acesso em: 19 Out. 2015.

³Ou *super* e *sub* funções, cf. Medeiros e Mello (2008, p. 168).

⁴Cf. Gordon (1994, p. 121).

⁵Cf. Henstock (1988, p. viii).

Ambas as definições de Kurzweil e Henstock têm suas similaridades, e ambas resgatam as ideias clássicas de Cauchy e Riemann. Inacreditavelmente, estes autores mostraram uma modificação relativamente simples nas definições de Riemann que produz uma integral equivalente às integrais de Perron e Denjoy⁶. Por esse motivo, é comum denominá-la *integral de Riemann generalizada*. Durante toda a década de 60 e também nas décadas seguintes, Henstock realizou um estudo sistemático desta nova integral, publicando diversos livros e artigos a respeito dela e também vendendo a ideia de que deve-se introduzi-la nos primeiros anos dos cursos de graduação.

Figura 4.2: Ralph Henstock (1884-1974) e Jaroslav Kurzweil juntos; e Edward James McShane (1904-1989).



Fonte: Konrad Jacobs, Erlangen.⁷

Trataremos brevemente desta integral neste capítulo, o suficiente para resolver a última deficiência da integral de Riemann que expomos na Seção 2.6.3 do Capítulo 2 e que remanesce na integral de Lebesgue, como vimos na Seção 3.8.3 do Capítulo 3. Ou seja, mostraremos que a *integral de Henstock-Kurzweil* satisfaz a fórmula (4.1) sempre que f é derivável em $[a, b]$.

4.1 Retorno à integral de Riemann

No Capítulo 2, Seção 2.2, dissemos que o número L é a integral definida de Riemann de uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ quando, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que, para qualquer partição pontilhada P^* de $[a, b]$ tal que $|P| < \delta$, tem-se $|S(P^*; f) - L| < \varepsilon$. Relembrando as notações, temos

$$S(P^*; f) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

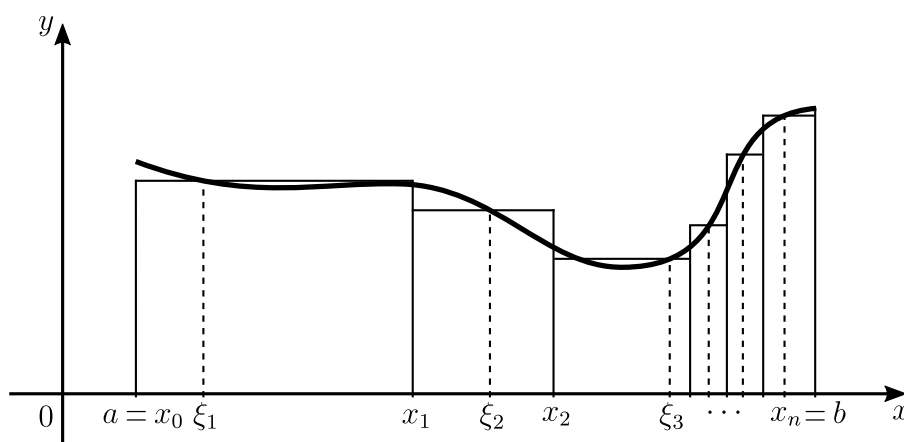
⁶Esta nova integral não se relaciona diretamente com a integral de Lebesgue, como é o caso da integral de Perron, justamente por utilizar o método de Riemann, que é completamente distinto do de Perron. Segundo Gordon (1994, p. 169), é mais fácil demonstrar a equivalência entre a integral generalizada e a de Denjoy e depois a equivalência entre a integral de Perron e a generalizada. Todas estas demonstrações podem ser encontradas na bibliografia indicada.

⁷Imagens ordenadamente disponíveis em: <http://owpodb.mfo.de/photoNormal?id=1678> e <http://owpodb.mfo.de/photoNormal?id=2814>. Acesso em: 19 Out. 2015.

onde $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$, pontilhada por $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$, com $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$, e a norma $|P|$ da partição P é definida como a maior amplitude de seus subintervalos.

Observe que nesta definição, fixado $\delta > 0$, as partições P tais que $|P| < \delta$ bem como os pontilhamentos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ são tomados arbitrariamente. Não há uma relação entre a norma da partição e os pontos de Ξ . Com toda esta liberdade a integração torna-se um processo complicado de limite.⁸ Como vimos na demonstração do Teorema 2.3, a definição da integral de Riemann permite a escolha de partições e pontilhamentos de forma que uma função ilimitada tenha somas de Cauchy arbitrariamente grandes.

Figura 4.3: Uma soma de Cauchy aprimorada.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O que acontece se associarmos cada pontilhamento a um comprimento diferente de subintervalo? O que aconteceria se passássemos a controlar as amplitudes dos subintervalos de acordo com os pontilhamentos neles tomados? E se tivéssemos a possibilidade de exigir uma amplitude menor e um pontilhamento conveniente a depender do grau de oscilação da função em uma dada região do domínio? Na Figura 4.3 temos uma soma de Cauchy “aprimorada” neste sentido. Com certeza estaríamos tornando mais eficaz a medição da área, impossibilitando a escolha de partições e pontilhamentos que comprometessem a aproximação da integral. Do ponto de vista geométrico, se pudéssemos fazer com que a amplitude de cada subintervalo das partições dependesse do pontilhamento nele considerado, talvez evitássemos a possibilidade de manter fixa a base do retângulo e tomar uma altura comprometedora. É precisamente neste ponto que aperfeiçoaremos a definição de Riemann.

Observação. Ao longo de todo este capítulo, sempre que considerarmos uma partição pontilhada $P^* = (P; \Xi)$, teremos $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$ e seu pontilhamento Ξ será dado por $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$, onde $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Desta forma evitaremos estar a todo momento exibindo os pontos e os

⁸Alguns autores tornam o processo menos aleatório ao exigir que os subintervalos das partições tenham todos a mesma amplitude e que os pontilhamentos sejam sempre tomados como o ponto médio de cada um destes intervalos. Este método funciona muito bem com funções contínuas, com as quais geralmente se inicia.

pontilhamentos das partições. Outra observação oportuna é que, ao nos referir à integrais no sentido de Riemann ou Lebesgue, faremos isto explicitamente. A seguir, ao escrever “integral” (ou “função integrável”) estaremos nos referindo à integral de Henstock-Kurzweil.

4.1.1 A integral de Henstock-Kurzweil

Uma função $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ estritamente positiva é dita um *calibre* sobre $[a, b]$. É imediato que a restrição de um calibre δ a um subintervalo $[c, d]$ de seu domínio é ainda um calibre, agora sobre $[c, d]$. Este conceito nos permitirá controlar individualmente a amplitude dos subintervalos das partições pontilhadas de acordo com seus pontilhamentos.

Dado um calibre δ sobre $[a, b]$, dizemos que uma partição pontilhada $P^* = (P, \Xi)$ de $[a, b]$ é δ -fina quando, para cada $i = 1, 2, \dots, n$,

$$0 < x_i - x_{i-1} < \delta(\xi_i).$$

Segue-se de imediato que

$$[x_{i-1}, x_i] \subset (\xi_i - \delta_\varepsilon(\xi_i), \xi_i + \delta_\varepsilon(\xi_i)),$$

para todo $i = 1, 2, \dots, n$. É comum referir-se a uma partição pontilhada P^* que é δ -fina como sendo uma *partição subordinada* ao calibre δ .

Observe que, dado um número real $\delta > 0$, uma partição pontilhada tal que $|P| < \delta$ é também uma partição δ -fina, onde consideramos o calibre constante $\delta(x) = \delta$. Ao invés de apenas fixar um limitante “global” da norma das partições, nossa nova definição de integral exigirá partições δ -finas, as quais possuem limitações “locais” para as amplitudes de seus subintervalos. Para podermos realizar esta exigência, entretanto, precisamos saber se sempre existem partições δ -finas. Mostraremos a seguir que todo calibre tem ao menos uma partição subordinada a ele.

Antes, observe que, dados um calibre δ sobre $[a, b]$ e um ponto c neste intervalo, segue-se que, se P' é uma partição δ -fina de $[a, c]$ e P'' é uma partição δ -fina de $[c, b]$, então $P = P' \cup P''$ é uma partição δ -fina de $[a, b]$. Dito isto, provemos o

Teorema 4.1. *Seja δ um calibre sobre $[a, b]$. Então existe uma partição pontilhada P^* subordinada a δ .*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que não exista uma partição pontilhada P^* subordinada a δ . Fazendo $I_0 = [a, b] = [a, (a+b)/2] \cup [(a+b)/2, b]$, segue-se que ao menos um destes intervalos não possui uma partição P^* δ -fina. Seja I_1 este intervalo. Note que $I_0 \supset I_1$ e $\text{amp}(I_1) = (b-a)/2$. Dividindo I_1 em dois subintervalos de mesma amplitude, um deles deve não possuir uma partição P^* δ -fina. Seja I_2 este intervalo. Observe que $I_1 \supset I_2$ e $\text{amp}(I_2) = (b-a)/2^2$. Aplicando este mesmo procedimento ao n -ésimo passo, obtemos indutivamente uma sequência decrescente $I_0 \supset I_1 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$ de intervalos compactos que não possuem partições δ -finas e cujo n -ésimo termo tem amplitude $(b-a)/2^n$. Pelo Corolário 1.2 do Capítulo 1, existe $x \in [a, b]$ tal que

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n = \{x\}.$$

Como $\delta(x) > 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} [\text{amp}(I_n)] = 0$, existe um intervalo I_{n_0} contendo x tal que $0 < \text{amp}(I_{n_0}) < \delta(x)$. Ora, o par $P^* = (I_{n_0}, \{x\})$ é uma partição δ -fina de I_{n_0} . Mas isto

é absurdo, pois contradiz nossa construção indutiva da sequência (I_n) . Portanto, deve existir uma partição pontilhada P^* de $[a, b]$ subordinada a δ . ■

Já podemos definir nossa nova integral. Dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que o número L é a *integral de Riemann generalizada* (ou *integral de Henstock-Kurzweil*) de f em $[a, b]$ quando, para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe um calibre δ_ε sobre $[a, b]$ tal que, $|S(P^*; f) - L| < \varepsilon$, seja qual for a partição pontilhada e δ_ε -fina P^* de $[a, b]$. Quando existe o número L com esta propriedade, f é dita *integrável*. Neste caso, escrevemos

$$L = \oint_a^b f(x)dx \quad \text{ou} \quad L = \oint_a^b f.$$

Denotaremos por $\mathcal{R}^*[a, b]$ o conjunto de todas as funções integráveis em $[a, b]$.

Como é natural ao desenvolver Matemática rigorosamente, é importante demonstrar a unicidade da integral.

Teorema 4.2. *A integral de Riemann generalizada de uma função, quando existe, é única.*

Demonstração. De fato, digamos que os números reais L_1 e L_2 sejam integrais da função f em $[a, b]$. Dado $\varepsilon > 0$, por definição, existem calibres δ'_ε e δ''_ε sobre $[a, b]$ tais que $|S(P^*; f) - L_1| < \varepsilon/2$, sempre que P^* for δ'_ε -fina, e $|S(P^*; f) - L_2| < \varepsilon/2$, sempre que P^* for δ''_ε -fina. Seja $\delta_\varepsilon = \min\{\delta'_\varepsilon, \delta''_\varepsilon\}$. Pelo Teorema 4.1, existe uma partição pontilhada Q^* que é δ_ε -fina. Note que, sendo assim, Q^* é tanto δ'_ε -fina quanto δ''_ε -fina. Logo,

$$|L_1 - L_2| \leq |S(Q^*; f) - L_1| + |S(Q^*; f) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue-se que $L_1 = L_2$. ■

É imediato que toda função integrável a Riemann é Henstock-Kurzweil-integrável (para cada $\varepsilon > 0$ o calibre δ_ε existe como uma constante positiva). Ou seja, a integral de Henstock-Kurzweil é trivialmente uma generalização da integral de Riemann. Por outro lado, um esforço que evitaremos aqui é o de mostrar que toda função Lebesgue-integrável é Henstock-Kurzweil-integrável e, além disso, estas integrais coincidem.⁹ Mais ainda, $\mathcal{R}^*[a, b] \setminus L[a, b] \neq \emptyset$, como nos mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 4.1. Em virtude dos Exemplos 3.17 e 3.18 (considerando calibres constantes), concluímos que $\oint_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx$ e $\oint_0^1 \frac{1}{x} \text{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$ existem sob a integral de Riemann generalizada, mas não no sentido de Lebesgue. ♦

Vejamos agora como calcular a integral da função de Dirichlet, a qual não é integrável a Riemann.¹⁰

Exemplo 4.2. Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a função de Dirichlet, isto é, a função que assume valor 0 se $x \in [0, 1]$ for irracional, e valor 1 se $x \in [0, 1]$ for racional. Então $\oint_a^b f = 0$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, seja $\{r_1, r_2, r_3, \dots\}$ uma enumeração dos racionais no intervalo $[0, 1]$ e $\delta_\varepsilon : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} & \text{se } x = r_i, \text{ para algum } i = 1, 2, 3, \dots, \\ 1 & \text{se } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

⁹Uma demonstração deste fato pode ser encontrada em Kurtz e Swartz (2004, p. 190).

¹⁰Cf. Exemplo 2.6 do Capítulo 2.

Então δ_ε é um calibre sobre $[0, 1]$. Seja $P^* = (P; \Xi)$ uma partição pontilhada e δ_ε -fina. Se existe $i = 1, 2, \dots, n$ tal que $\xi_i = r_k$, para algum $k \in \mathbb{N}$, pela definição de f e por P^* ser δ_ε -fina, segue-se que $f(\xi_i) = f(r_k) = 1$ e $x_i - x_{i-1} < \delta_\varepsilon(\xi_i) = \delta_\varepsilon(r_k) = \varepsilon/2^{k+1}$, donde

$$f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < 1 \cdot \delta_\varepsilon(\xi_i) = \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Observe que pode existir $k \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $r_k = \xi_{i-1}$ e $r_k = \xi_i$. Neste caso, temos

$$f(\xi_{i-1})(x_{i-1} - x_{i-2}) + f(\xi_i)(\xi_i - \xi_{i-1}) < 1 \cdot \delta_\varepsilon(\xi_{i-1}) + 1 \cdot \delta_\varepsilon(\xi_i) = 2 \left(\frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \right) = \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Por outro lado, se $\xi_i \neq r_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então

$$f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = 0 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0.$$

Consequentemente,

$$|S(P^*; f) - 0| = S(P^*; f) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Como a partição pontilhada e δ_ε -fina P^* foi considerada arbitrariamente, f é integrável em $[0, 1]$ e $\mathcal{F}_0^1 f = 0$. $\blacklozenge$

Uma questão surge naturalmente: por que calibres funcionam tão bem? Como vimos no exemplo acima, conseguimos por meio do calibre fazer com que os pontilhamentos racionais estejam em intervalos cuja amplitude seja tão “insignificante” quanto menor for ε , de modo que estes intervalos não contribuem significativamente para o valor final da integral. Muitas outras respostas para o sucesso dos calibres são dadas em Bartle (2001, passim). Dentre elas, a mais interessante para nossa discussão é que é possível escolher calibres δ capazes de forçar determinados pontos a serem tomados como pontilhamento de quaisquer partições δ -finas. Vejamos um exemplo.

Exemplo 4.3. Consideremos o intervalo $[0, 1]$ e definamos o calibre $\delta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ pondo $\delta(x) = x/2$ se $x \in (0, 1]$ e $\delta(0) = 1/4$. Seja $P^* = (P; \Xi)$ uma partição δ -fina arbitrária. Afirmamos que o primeiro pontilhamento $\xi_1 \in [0, x_1]$ deve ser obrigatoriamente igual a 0. De fato, suponhamos que $x_1 \geq \xi_1 > 0$. Então $\delta(\xi_1) = \xi_1/2$, donde $\xi_1 - \delta(\xi_1) = \xi_1/2 > 0$. Porém, como P^* é δ -fina, temos $[0, x_1] \subset (\xi_1 - \delta(\xi_1), \xi_1 + \delta(\xi_1))$, donde $\xi_1 - \delta(\xi_1) < 0$, contradição. Portanto, $\xi_1 = 0$. $\blacklozenge$

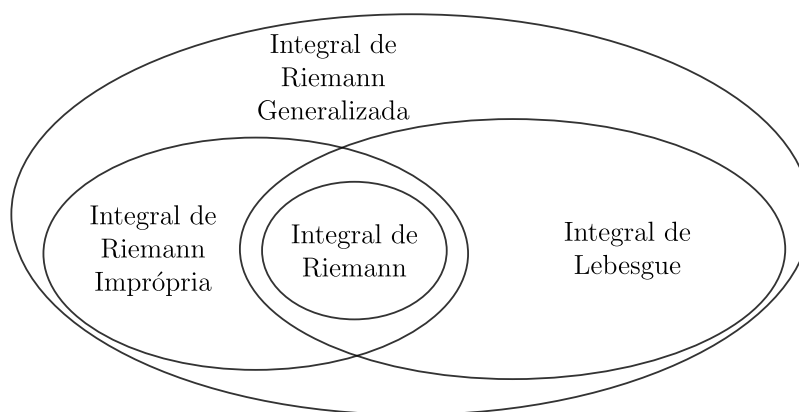
Um comentário oportuno: na integral de Henstock-Kurzweil, não existe *integral imprópria*. De fato, mostra-se¹¹ que, se uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável em cada intervalo $[a, c] \subset [a, b]$ e existe o limite $\lim_{x \rightarrow c^-} \mathcal{F}_a^c f(t)dt$, então f é integrável em $[a, b]$ e $\mathcal{F}_a^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow c^-} \mathcal{F}_a^c f(t)dt$. Esta propriedade, nomeada *Teorema de Hake*¹², não é válida para a integral de Lebesgue, o que indica os benefícios operacionais que obtemos com a integral de Riemann generalizada. Quanto a intervalos ilimitados, é possível adequar as definições da integral de Henstock-Kurzweil de modo a tornar toda e qualquer integral $\mathcal{F}_a^b$ em uma integral da forma $\mathcal{F}_{-\infty}^{+\infty}$. Neste caso, qualquer função passa a ter domínio $\mathbb{R}^*$

¹¹Cf. Gordon (1994, p. 150).

¹²Cf. Bartle (2000, p. 288), o Teorema de Hake afirma que $\mathcal{F}_a^b f$ existe se e somente se existe o limite $\lim_{x \rightarrow a^+} \mathcal{F}_x^b f$ e, em caso afirmativo, tem-se $\mathcal{F}_a^b f = \lim_{x \rightarrow a^+} \mathcal{F}_x^b f$. O mesmo vale para $\lim_{x \rightarrow b^-} \mathcal{F}_a^x f$.

(o conjunto dos números reais estendidos¹³) e atribuímos o valor 0 nos pontos em que as funções a serem integradas não estavam definidas (isto inclui os “pontos” $+\infty$ e $-\infty$, isto é, põe-se $f(\pm\infty) = 0$). Após esta modificação, todos os resultados continuam válidos. Um tratamento completo da integral de Riemann generalizada sob intervalos ilimitados pode ser encontrados em DePree e Swartz (1988, p. 181-188). Mais detalhes e discussão sobre a inexistência de integrais de Henstock-Kurzweil impróprias podem ser encontrados em McLeod (1980, p. 28-31). A situação atual das teorias de integração está representada no diagrama da Figura 4.4.

Figura 4.4: Diagrama das integrais de Riemann, Lebesgue e Henstock-Kurzweil.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Antes de encerrarmos esta seção, apontaremos alguns aspectos problemáticos da integral de Henstock-Kurzweil.¹⁴ É notável que, por ser uma integral mais geral, é possível admitir no conjunto das funções integráveis a presença de “monstruosidades”, isto é, funções complicadas e problemáticas. Por este motivo, algumas propriedades válidas para as integrais de Riemann ou Lebesgue foram perdidas neste novo conceito. Em primeiro lugar, não podemos afirmar que o produto de duas funções integráveis ainda é integrável, mesmo se admitirmos que uma delas seja limitada¹⁵. Em segundo lugar, uma função integrável não é necessariamente integrável absolutamente. De fato, dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável, não é válida a bi-implicação¹⁶

$$f \in \mathbb{R}^*[a, b] \Leftrightarrow |f| \in \mathbb{R}^*[a, b]. \quad (4.2)$$

Mostra-se¹⁷ que o conjunto das funções *absolutamente integráveis* em $\mathbb{R}^*[a, b]$, isto é, que satisfazem (4.2), é exatamente o conjunto $L[a, b]$ das funções Lebesgue-integráveis¹⁸, de

¹³Cf. Seção 3.8.2 do capítulo anterior.

¹⁴Adiante falaremos sobre algumas integrais que surgiram para superar outros aspectos deficientes das integrais (equivalentes) de Henstock-Kurzweil, Denjoy e Perron.

¹⁵Veja a Proposição 3.13 do capítulo anterior

¹⁶Veja o Exemplo 3.12.

¹⁷Isto é feito em Gordon (1994, Capítulo 10) através de um caso particular da integral de Henstock-Kurzweil, a *integral de McShane*, que é equivalente à integral de Lebesgue. Discutiremos brevemente sobre esta integral na Seção 4.1.3 adiante.

¹⁸Para comparar as integrais de Henstock-Kurzweil e de Lebesgue, podemos fazer uma analogia com séries. A primeira seria o conjunto de todas as séries convergente, incluindo as condicionalmente convergentes. A segunda seria o conjunto das séries absolutamente convergentes. Este último conjunto é

modo que a integral de Lebesgue pode ser definida a partir desta equivalência¹⁹. Em quinto lugar, embora seja positivo o fato de que funções como $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ e $\frac{\text{sen}(x)}{x}$, as quais não tinham “residência” única²⁰, agora sejam integráveis num mesmo sentido, perdemos em termos de completude. De fato, define-se naturalmente em $\mathcal{R}^*[a, b]$ uma semi-norma conhecida como *norma de Alexiewicz*. O espaço normado resultante denomina-se *espaço de Denjoy*. Ao contrário do espaço L^1 com sua norma- L^1 , o espaço de Denjoy não é completo sob sua norma.²¹ Por fim, embora possamos estender a integral de Henstock-Kurzweil a espaços como $\mathbb{R}^n$ ou espaços complexos mantendo todos os benefícios já discutidos, aplicá-la a espaços mais abstratos, o que é possível, faz com que seja perdida toda a noção intuitiva tão triunfante da teoria. Fazendo isto, a integral assume rapidamente um nível muito elevado de abstração. Tanto Henstock quanto Kurzweil já trabalharam nestas ideias.²² Em compensação, existem novos teoremas de convergência para as integrais de Henstock-Kurzweil, Denjoy e Perron. Alguns destes generalizam os já obtidos nas Seções 3.5 e 3.6 do capítulo anterior.²³ Outro grande triunfo será discutido na próxima seção.

4.1.2 O Teorema Fundamental do Cálculo

Solucionaremos finalmente o problema remanescente nas teorias de integração das quais tratamos nos capítulos anteriores deste trabalho. Antes, vale relembrar o atual status do Teorema Fundamental do Cálculo de Riemann (Teorema 2.5) e de Lebesgue (Teorema 3.7). Na Seção 2.6.3 do Capítulo 2 vimos que, para validar a fórmula de Newton-Leibniz (4.1) na integral de Riemann, é necessário impor f' integrável. Na Seção 3.8.3 do Capítulo 3, melhoramos a situação com a integral de Lebesgue impondo apenas f' limitada. Agora com a integral de Henstock-Kurzweil será possível afirmar (4.1) sem qualquer requerimento adicional além da derivabilidade de f' .

Teorema 4.3. (*Teorema Fundamental do Cálculo*) *Toda função derivável $f \in \mathcal{R}^*[a, b]$ tem derivada integrável e vale*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'.$$

Demonstração. Seja dado $\varepsilon > 0$. Para cada ponto $x \in [a, b]$, como f é derivável em x , temos

$$\lim_{y \rightarrow x} \left[\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - f'(x) \right] = 0,$$

donde existe $\delta_\varepsilon(x) > 0$ tal que

$$0 < |y - x| < \delta_\varepsilon(x) \Rightarrow \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} - f'(x) \right| < \frac{\varepsilon}{b - a} = \varepsilon'. \quad (4.3)$$

(Tomamos $\varepsilon' = \varepsilon/(b - a)$ para melhorar a notação.) A condição acima define um calibre δ_ε sobre $[a, b]$. De (4.3), para todo $y \in [a, b]$ tal que $0 < |y - x| < \delta_\varepsilon(x)$, temos

$$|f(y) - f(x) - (y - x)f'(x)| < |y - x|\varepsilon'. \quad (4.4)$$

muito mais comportado (podemos rearranjar os termos e realizar diversas operações sem alterar o valor da soma), enquanto que o primeiro é problemático (um rearranjo pode resultar em qualquer valor, inclusive $\pm\infty$, e as operações permitidas são em menor número).

¹⁹O que é feito em Bartle (2000, p. 290).

²⁰Cf. Seção 3.8.1 do Capítulo 3.

²¹Cf. McInnis (2002, p. 41-43).

²²Cf. Henstock (1973, 1991) e Kurzweil (2000, 2002).

²³Cf. Goron (1994, Capítulo 13) e Kurtz e Swartz (2004, p. 180-188).

Logo, se z e w são tais que $a \leq z \leq x \leq w \leq b$ e $0 < w - z < \delta_\varepsilon(x)$, então

$$|f(w) - f(z) - (w - z)f'(x)| < (w - z)\varepsilon', \quad (4.5)$$

pois, de (4.4),

$$\begin{aligned} |f(w) - f(z) - (w - z)f'(x)| &= |f(w) - f(x) + f(x) - f(z) - (w - x + x - z)f'(x)| \\ &\leq |f(w) - f(x) - (w - x)f'(x)| + |f(x) - f(z) - (x - z)f'(x)| \\ &< (w - x)\varepsilon' + (x - z)\varepsilon' = (w - z)\varepsilon'. \end{aligned}$$

Seja $P^* = (P; \Xi)$ uma partição pontilhada e δ_ε -fina. Observe que

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})].$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a) - S(P^*; f')| &= \left| \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] - \sum_{i=1}^n [(x_i - x_{i-1})f'(x_i)] \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1}) - (x_i - x_{i-1})f'(x_i)] \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1}) - (x_i - x_{i-1})f'(x_i)| \\ &< \sum_{i=1}^n [(x_i - x_{i-1})\varepsilon'] = \varepsilon' \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \quad (\text{De (4.5)}) \\ &= \varepsilon'(b - a) = \frac{\varepsilon}{b - a}(b - a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Pela definição, f' é integrável e

$$f(b) - f(a) = \oint_a^b f',$$

como queríamos. ■

Como aplicação, vamos integrar a derivada da função dada no Exemplo 3.19, a qual não é integrável no sentido de Lebesgue.

Exemplo 4.4. Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x^2}\right) & \text{se } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Então f é derivável em $[0, 1]$. Pelo Teorema 4.3, $\oint_0^1 f' = f(1) - f(0) = 0$. ◆

Assim, além do que já discutimos na seção anterior, a integral de Henstock-Kurzweil tem o benefício pedagógico de tornar mais simples o enunciado do importante Teorema Fundamental do Cálculo, simplificando o cálculo de integrais através de primitivas. Na próxima seção levantaremos algumas discussões pedagógicas a respeito da utilização desta integral em cursos de graduação em Matemática.

4.1.3 A integral de McShane e algumas observações pedagógicas

No fim dos anos 60, Edward McShane (1904-1989) (MCSHANE, 1969) exibiu uma nova definição de integral baseada nas ideias de Henstock. A *integral de McShane*, como ficou conhecida, faz apenas uma única modificação na definição da integral de Henstock-Kurzweil exibida na Seção 4.1.1. De fato, as partições pontilhadas consideradas na definição de McShane são de um tipo especial: não é necessário que os pontilhamentos pertençam ordenadamente a cada subintervalo, isto é, substitui-se o requerimento $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ por $\xi_i \in [a, b]$. É imediato que a integral de McShane é um caso particular da integral de Henstock.

Como essa modificação aumenta o número de partições subordinadas a um dado calibre δ , é, digamos, “mais difícil” de uma função ser McShane-integrada. McShane demonstrou que sua integral é uma *integral absoluta*, no sentido de que f é McShane-integrável se, e somente se, f e $|f|$ são integráveis à Henstock-Kurzweil. Desta forma, sua integral é equivalente à de Lebesgue.²⁴ Além disso, McShane também obteve os teoremas de convergência e outros resultados concernentes à integral de Lebesgue, tudo isso sem a necessidade de uma Teoria da Medida.

No fim da década de 60 o próprio R. Henstock, McShane e outros teóricos já haviam desenvolvido completamente estas novas teorias de integração, inclusive com tratamentos elementares, sendo este último tipo de abordagem realizado na esperança de que estas teorias tornassem-se padrão em cursos de Análise ou introdução à Teoria da Medida. McShane foi um entusiasta da ideia de trazer ao ensino de graduação uma integral que fosse intuitiva e que não tivesse seu desenvolvimento descartado ao avançar-se nos estudos. Em seu *A Unified Theory of Integration* de 1973, promove a utilização de uma teoria poderosa introduzida como sequência da integral de Darboux, o ponto em que geralmente se inicia os estudos de teoria da integração em cursos de introdução à Análise.²⁵ Nesse artigo, McShane trás uma proposta detalhada de ensino da integral de McShane partindo da integral de Darboux (e das ideias de integração ali agregadas) e atingindo o Teorema da Convergência Monótona, a integral em duas dimensões e integrais impróprias, além de aplicar sua teoria ao desenvolvimento das Medidas de Probabilidade. O autor ainda faz referência a seu livro *A Riemann-type integral that includes Lebesgue-Stieltjes, Bochner and stochastic integrals* de 1969, onde pode ser encontrado um desenvolvimento completo de sua integral.

Outros teóricos não mediram esforços em promover a ideia de inserir a integral de Henstock-Kurzweil a nível de graduação. O primeiro movimento formal neste sentido foi realizado no evento *Joint Mathematics Meeting* em San Diego, Califórnia, em Janeiro de 1997²⁶ no qual Robert Bartle, Ralph Henstock, Jaroslav Kurzweil, Eric Schechter, Stefan Schwabik e Rudolf Vítborný distribuíram uma carta pública direcionada aos autores de livros de cálculo solicitando a inserção desta integral em seus textos.²⁷ Posteriormente pretendia-se divulgar a carta em outros eventos com um número maior de assinaturas. Contudo, estes esforços não surtiram efeito significativo. Esta foi a primeira e última

²⁴Uma demonstração direta deste fato pode ser encontrada em Kurtz e Swartz (2004, p. 251).

²⁵Tratamos desta integral na Seção 2.3 do Capítulo 2. Iniciar com a integral de Darboux é padrão em cursos de introdução à Análise por motivos principalmente didáticos, visto que o processo de integração de Darboux é mais simples, elegante e produz bons resultados e caracterizações. Tratamentos deste tipo são encontrados na maioria dos livros, como em Ávila (1999), Figueiredo (2013), Lima (2013a, 2013b) ou Spivak (1994).

²⁶Cf. Tikare (2011, p. 11).

²⁷A carta está disponível em <http://www.math.vanderbilt.edu/~schectex/ccc/gauge/letter/>.

carta aberta deste tipo.

O que dizer dos dias de hoje? Ora, há mais de 15 anos diversos autores tratam desta integral em seus livros de introdução à Análise Real²⁸ ou voltados especificamente à integração de Henstock²⁹, cujas abordagens direcionam-se à graduação. A integral de Riemann generalizada não proporciona uma mudança radical de ideias, visto que o novo conceito é muito similar ao tratamento clássico de Riemann, o qual já se tem afinidade. Melhor ainda, esta integral é ainda mais geral do que a integral de Lebesgue e com ela podemos obter os teoremas de convergência sem a necessidade de gastar todo o tempo necessário para o desenvolvimento de uma teoria da medida. Com efeito, não mencionamos “medida” em nossas considerações das seções anteriores. Surge então a pergunta: porque hoje em dia a integral de Henstock-Kurzweil não é padrão em cursos de Cálculo integral ou introdução à Análise? Uma integral “melhor” e “mais poderosa” não seria desejável?

E quanto à integral de McShane? O próprio McShane defendeu a ideia de que uma teoria como a sua é altamente viável, pois não rompe as linhas de raciocínio com as quais os alunos estão habituados, além de ser capaz de fornecer todos os teoremas concernentes à integral de Lebesgue com uma abordagem baseada em somas de Cauchy especiais. E, novamente, tudo é desenvolvido sem o uso de uma teoria da medida, evitando assim as σ -álgebras e todo os demais conceitos abstratos envolvidos nas abordagens clássicas da integral de Lebesgue. Poderia a integral de McShane, juntamente com a de Henstock-Kurzweil, substituir a integral de Lebesgue?

Existem alguns possíveis motivos pelos quais a integral de Henstock-Kurzweil não é padrão em cursos de análise. Um deles é o pouca popularidade. Esta teoria de integração não é bem conhecida, talvez por ser um conceito relativamente novo (que “recicla” um antigo). Além disso, livros e artigos que tratam desta integral ainda não são numerosos, embora surjam cada vez mais. Outro possível motivo é que a integral de Lebesgue, por se basear em conceitos muito gerais, pode ser facilmente estendida a contextos mais abstratos e distintos daqueles estudados em cursos introdutórios de Análise. De fato, podemos aplicá-la a qualquer tipo de espaço de medida, cujos elementos podem ser de vários tipos, sejam números (em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), vetores n -dimensionais (em $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$), caminhos possíveis de uma partícula sobre um líquido (no *movimento Browniano*) ou outros. A integral de Henstock-Kurzweil também pode se adequar a estas situações. Porém, quanto mais abstrato o ambiente (como no movimento Browniano), mais difícil é esta tarefa. Como já apontamos, o próprio Henstock já trabalhou nestas ideias. Percebe-se em seu tratamento³⁰ que a abstração é necessária para fornecer aplicações em espaços abstratos.³¹ Assim, mesmo que em um contexto tenhamos uma noção relativamente intuitiva, no fim a alta abstração é inevitável. Estes comentários se aplicam também à integral de McShane, pois é possível adequá-la às situações mais gerais, porém com um acréscimo considerável de conceitos abstratos. Outro motivo que também se aplica a ambas as integrais supracitadas é histórico. As integrais de Henstock-Kurzweil e de McShane vieram surgir mais de 50 anos depois da integral de Lebesgue. Por ter vindo antes e por sua generalidade, desenvolver a teoria de Lebesgue tornou-se uma tradição já

²⁸Cf. Bartle (2000) ou Mawhin (1997), por exemplo. Estes autores tratam-na como uma noção básica de integral.

²⁹Yee e Vybony (2000).

³⁰Cf. Henstock (1973, 1991).

³¹Contudo, também existem vantagens (teóricas, não pedagógicas) em utilizar versões da integral de Henstock-Kurzweil em contextos gerais como estes. Por exemplo, a unicidade da *integral de Itô*, aplicada no estudo do movimento Browniano, tem uma longa demonstração se definida da maneira clássica. Porém, através de uma definição tipo-Riemann a prova é trivial. (YEE, 2007, p. 770).

bem estabelecida hoje em dia, cujas aplicações e respostas fornecidas a diversos problemas existem com relevância considerável e em grande número.

Algumas críticas agravam a disseminação das ideias de Henstock e McShane, principalmente contra este último. É possível desenvolver os teoremas de convergência para a integral de McShane, porém, em comparação com a integral de Lebesgue, as demonstrações destes teoremas são muito mais complicadas e trabalhosas. No desenvolvimento, digamos, “convencional” da integral de Lebesgue, os teoremas de convergência decorrem muito mais naturalmente. Outro aspecto importante, este que se aplica a ambas as integrais (Henstock-Kurzweil e McShane) é a dificuldade didática que se têm no desenvolvimento analítico das demonstrações e cálculos de integrais. Isso se deve ao uso dos calibres que, por definição, não são funções positivas de um tipo específico (são arbitrários). Então uma questão que se levanta é qual seria a maturidade matemática necessária para lidar com estes conceitos. Afinal um calibre pode ser simples em alguns casos (como nas funções Riemann-integráveis), mas também pode ser bastante complicado.

Curiosamente, o próprio Henstock já tentou ensinar sua integral no primeiro ano de um curso de graduação em Matemática da Universidade de Lancaster. Segundo o relato de um de seus alunos, Lee Peng Yee, foi desastroso. Ele teve que abandonar o curso e nunca mais tentou novamente. Outros professores tiveram mais sucesso ensinando a integral em cursos de Análise a nível de graduação ou pós-graduação, alguns dos quais escreveram livros sobre isto.³² A principal complicação no ensino da integral de Henstock-Kurzweil é de certa forma intrínseca, pois surge a partir da dificuldade na construção e compreensão dos calibres e das partições δ -finas. A integral apenas exige a existência, e alguns resultados podem garanti-la. Porém, não se estipula o quão complicado cada calibre pode ou deve ser. Existem alguns artigos e livros que tratam a problemática da redução da classe dos calibres.³³

Então, deveríamos adotar a integral de Henstock-Kurzweil? E, em caso afirmativo, qual seria o melhor momento para se inseri-la? Em geral, os cursos de cálculo integral no início da graduação são oferecidos a alunos com pouca experiência. Nestes casos, é comum evitar as demonstrações ou então exibi-las em casos particulares muitas vezes com argumentos geométricos. Questões como a integrabilidade da função de Dirichlet estão fora de contexto. Nesse nível, a inserção da integral de Henstock-Kurzweil poderia ser benéfica por motivos práticos. O TFC é mais simples de ser enunciado e não há a necessidade de falar sobre integrais impróprias. De fato, como já comentamos, se uma função pode ser integrada através da técnica de integração aplicada às integrais impróprias no sentido de Riemann, então esta função é integrável no sentido convencional de Henstock-Kurzweil. Isto torna dispensável a palavra “integral imprópria” do vocabulário do estudante. No entanto, essas observações não surtem efeito significativo para a maioria dos estudantes neste nível, pois, para eles, a fórmula

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$$

é sempre utilizada sem qualquer inspeção de f' , e as integrais impróprias são consideradas integrais comuns, iguais a todas as outras. Não é comum demonstrar, por exemplo, que a integral $\int_0^1 f$ da função $f(x) = 1/\sqrt{x}$ se $x \in (0, 1]$ e $f(0) = 0$ seria igual a $+\infty$ se tentássemos utilizar a definição padrão de Riemann. Em geral, nota-se que esta função

³²Cf. Yee (2007, p. 768).

³³Cf. Gordon (1994, p. 152-3) ou, de modo mais geral, Pfeffer (1988).

é ilimitada no ponto 0 e, portanto, deve ser integrada através de uma técnica especial: $\int_0^1 f = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 f$, se o limite existir.

O próximo nível em que poderia ser inserida a integral de Henstock-Kurzweil seria num curso de introdução à Análise Real. Neste nível, espera-se uma maior maturidade matemática por parte dos alunos. São fornecidas as demonstrações omitidas nos cursos de Cálculo e um tratamento rigoroso (através de argumentos do tipo ε - δ) da teoria de sequências e séries, além de algumas noções topológicas dos números reais, funções contínuas, derivadas e integrais. Inserir a integral de Henstock-Kurzweil requer apenas algumas modificações sutis, obtendo-se com isto uma teoria muito mais poderosa. Além disso, é possível utilizar esta integral para introduzir a medida de Lebesgue. Procede-se da mesma maneira feita com a integral de Lebesgue-Riesz na Seção 3.4.1 do capítulo anterior.³⁴ Este nos parece ser o momento certo para inserir a teoria de integração de Henstock-Kurzweil a nível de graduação.

O último nível do qual discutiremos é o de pós-graduação. Em geral a teoria da integração de Lebesgue é desenvolvida dentro de cursos de Teoria da Medida.³⁵ Boa parte do tempo é gasto no desenvolvimento de conceitos como σ -álgebras, funções mensuráveis, medidas interior e exterior, dentre outros. Neste ponto, inserir ou substituir a integral de Henstock-Kurzweil acarretará mudanças drásticas na disciplina. De fato, agora temos ε - δ versus σ -álgebras. No caso da substituição, podemos ter benefícios iniciais mas malefícios posteriores. Muitas das principais aplicações requerem estruturas abstratas, de modo que a simplicidade inicial não se estenderia por muito tempo. Por hora, não existe um tratamento da teoria que justifique esta troca em termos gerais. Em termos particulares, sob $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, por exemplo, a troca se justifica quando o intuito é obter aplicações em ciências menos gerais, como as engenharias. De fato, evitar o desenvolvimento de uma teoria da medida e alcançar uma integral poderosa como a de Henstock-Kurzweil é uma proposta tentadora nestes casos.

No caso da adição da teoria de Henstock como auxílio no desenvolvimento da teoria da medida, mais vantagens aparecem. Porém, ao contrário do que vimos com o método de Riesz, os teoremas de convergência não decorrem de maneira tão natural. Assim, a primeira alternativa viável no sentido de simplificar o desenvolvimento da integral de Lebesgue em termos gerais seria inserir a integral de Lebesgue-Riesz inicialmente, de modo que os alunos possam ter um contato prévio com os teoremas de convergência e o espaço L^1 e, posteriormente, utilizá-la para definir a medida de Lebesgue³⁶. A segunda alternativa seria introduzir a integral de Henstock-Kurzweil e, sem desenvolver teoremas de convergência, utilizá-la para definir a medida de Lebesgue. Neste trabalho escolhemos a primeira alternativa e, com ela, fornecemos uma visão geral dos tipos de problemas tratados pelos principais resultados da teoria da integração de Lebesgue: o espaço L^1 (que é um caso particular dos espaços L^p estudados posteriormente) e os teoremas de convergência.

³⁴Faz-se assim: um conjunto $E \subset [a, b]$ é *Lebesgue-mensurável* se e somente se sua função característica χ_E é Henstock-Kurzweil-integrável. Neste caso, sua *medida* é definida por $\mu(E) = \int_a^b \chi_E$.

³⁵Alguns programas denominam estes cursos simplesmente de Teoria da Medida ou introdução à Teoria da Medida. Outros adotam o nome Medida e Integração, Medida e Integral de Lebesgue, etc.

³⁶Como em Chae (1995) ou Medeiros e Mello (2008).

4.2 Uma olhada sobre outras integrais

Encerramos este capítulo com alguns breves comentários a respeito de outras integrais, que surgiram para tornar ainda mais amplo o processo de recuperar uma função a partir de sua derivada.

Logo após as primeiras ideias de Denjoy surgirem, ele mesmo observou que uma outra modificação poderia fornecer uma integral ainda mais geral. Porém, a tarefa de organizar estas ideias e desenvolver a teoria deve-se ao matemático soviético Aleksandr Khinchin (1894-1959). Ao contrário da integral de Henstock-Kurzweil, que recupera uma função contínua a partir de sua derivada (veja o Teorema 4.3), a *integral de Khinchin*, como ficou conhecida, é capaz de recuperar uma função contínua a partir de sua *derivada aproximada*.³⁷ A construção desta integral é muito similar ao processo utilizado no desenvolvimento da integral de Denjoy.

É fato que uma função diferenciável é necessariamente contínua. Porém, uma função que é aproximadamente diferenciável não é necessariamente contínua, mas sim *aproximadamente contínua*.³⁸ Em Gordon (1994, Capítulos 16 e 17) desenvolve-se as duas novas integrais, a *integral de Henstock aproximadamente contínua* e a *integral de Perron aproximadamente contínua*, as quais são capazes de fazer o que a integral de Khinchin não faz: recuperar uma função aproximadamente contínua a partir de sua derivada aproximada. A primeira generaliza as definições de Henstock mas se apoiam no conceito de conjuntos mensuráveis. Já a segunda surge a partir de uma modificação simples nas definições de Perron.

É claro que existem muitas outras teorias de integração.³⁹ Contudo, qualquer comentário sobre elas foge do escopo deste trabalho.

³⁷Este conceito é tratado em Gordon (1994, p. 237). O Capítulo 15 do referido livro consiste em um tratamento introdutório da integral de Khinchin.

³⁸Idem (1994, p. 245).

³⁹Integrais de Henstock-Stieltjes, Kunugi, Feymann, Itô, Wiener, Daniell e Haar são alguns exemplos.

Conclusão

Pudemos com este trabalho solucionar todas as deficiências da integral de Riemann apontadas no Capítulo 2. Vimos que a classe das funções integráveis é amplamente expandida com a integral de Lebesgue-Riesz e, mais ainda, com a integral de Henstock-Kurzweil, a qual generaliza esta última.

As propriedades operacionais da integral de Lebesgue superam as de Riemann em diversos aspectos. Os teoremas de convergência monótona e dominada são muito mais poderosos do que aqueles teoremas de convergência para a integral de Riemann, e fornecem condições mínimas para realizar a integração termo-a-termo de sequências ou séries de funções integráveis.

A solução para o Teorema Fundamental do Cálculo de Riemann não foi dado pela integral de Lebesgue-Riesz. Com efeito, o TFC-Lebesgue ainda tem um enunciado restritivo. Utilizamos a integral de Henstock-Kurzweil para fornecer uma versão mais poderosa do Teorema Fundamental do Cálculo, capaz de resgatar qualquer função contínua a partir de sua derivada.

Vimos também que o completamento do espaço das funções contínuas está contido no espaço das funções Lebesgue-integráveis. Sendo ele mesmo completo, a solução fornecida pela teoria da integração de Lebesgue é ainda melhor do que esperávamos.

Durante o desenvolvimento das Teorias de Integração, vimos que deficiências ou restrições nas anteriores forneceram motivações para o desenvolvimento de generalizações, gerando as próximas. A integral de Cauchy exigia que uma função fosse contínua, o que não mais acontecia na integral de Riemann. A integral de Darboux incrementou as propriedades da integral de Riemann, simplificando o desenvolvimento desta integral através de uma abordagem mais prática. A integral de Lebesgue eliminou qualquer exigência de limitação das funções a serem integradas. Porém, como vimos na Seção 3.8.1, esta integral não é uma generalização da integral imprópria de Riemann. Este problema foi posteriormente solucionado pela integral de Henstock-Kurzweil, que generaliza tanto as integrais de Riemann própria e imprópria quanto a integral de Lebesgue. Outras integrais ainda são desenvolvidas de modo a superar problemas na integral de Henstock-Kurzweil. Algumas surgem a partir de generalizações da própria teoria de Henstock, com é o caso da integral de Henstock aproximadamente contínua, e outras surgem como generalizações de integrais que, com assinalado, são equivalentes à integral de Henstock-Kurzweil, isto é, das integrais de Denjoy e de Perron. De fato, as integrais de Khinchin e a integral de Perron aproximadamente contínua são generalizações destas integrais.

A Teoria da Integração é rica em diversos aspectos. Como já comentamos na introdução deste trabalho, cientistas se voltam para esta teoria por vários motivos e, cada vez mais, a Matemática em geral e a Teoria da Integração em particular se aplicam a áreas científicas novas ou em desenvolvimento. Por este motivo, precisamos desenvolver teorias cada vez mais poderosas, de modo que a Matemática não seja motivo para limitações no avanço das ciências aplicadas.

Referências Bibliográficas

ABBOTT, S. *Understanding Analysis*. New York: Springer, 2001.

ALIPRANTIS, C. D.; BURKINSHAW, O. *Principles of real analysis*. San Diego: Academic Press, 1998.

ARZELA, C. Sulla integrazione per serie. *Atti Acc. Lincei Rend., Rome*, v. 1, p. 532–537, 1885.

ÁVILA, G. S. S. *Introdução à análise matemática*. 2. ed. São Paulo: Bluncher, 1999.

BARTLE, R. G. *The elements of real analysis*. 2. ed. New York: John-Wiley & Sons, 1964.

BARTLE, R. G. *A modern theory of integration*. 2. ed. Providence: American Mathematical Society, 2001.

BARTLE, R. G.; SHERBERT, D. R. *Introduction to Real Analysis*. 3. ed. New York: John-Wiley & Sons, 2000.

BENEDETTO, J. J.; CZAJA, W. *Integration and modern analysis*. Boston: Springer Science & Business Media, 2009.

BERKELEY, G. The analyst (1734). *The Works of George Berkeley*, p. 1948–1957, 1948.

CANTOR, G. De la puissance des ensembles parfaits de points. *Acta Mathematica*, Springer, Djursholm, v. 4, n. 1, p. 381–392, 1884.

CAUCHY, A.-L. *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique*. New York: Cambridge University Press, 1821.

CAUCHY, A.-L. *Résumé des leçons données à l'école royale polytechnique sur le calcul infinitésimal*. Paris: Imprimerie Royale, 1823.

CHAE, S. B. *Lebesgue integration*. 2. ed. New York: Springer Science & Business Media, 1995.

COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear*. 2. ed. São Paulo: Editora USP, 2013.

COHN, D. L. *Measure Theory*. 2. ed. New York: Birkhäuser Basel, 2013.

DARBOUX, G. Mémoire sur les fonctions discontinues. Gauthier-Villars, Paris, v. 4, p. 57–112, 1875.

-
- DENJOY, A. Une extension de l'intégrale de m. lebesgue. *CR Acad. Sci. Paris*, Gauthier-Villars, Paris, v. 154, p. 859–862, 1912.
- DEPREE, J.; SWARTZ, C. *Introduction to Real Analysis*. New York: John-Wiley & Sons, 1988.
- FATOU, P. Séries trigonométriques et séries de taylor. *Acta Mathematica*, Springer, Djursholm, v. 30, n. 1, p. 335–400, 1906.
- FIGUEIREDO, D. G. *Análise I*. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.
- FONSECA, I.; LEONI, G. *Modern Methods in the Calculus of Variations: L^p Spaces*. New York: Springer Science & Business Media, 2007.
- GELBAUM, B. R.; OLMSTED, J. M. H. *Counterexamples in Analysis*. New York: Dover Publications, 2003.
- GORDON, R. A. *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*. New York: American Mathematical Society, 1994.
- GRABINER, J. V. *The origins of Cauchy's rigorous calculus*. New York: Dover Publications, 2005.
- GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo, vol. 1*. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- HABIL, E. D. Double sequences and double series. *The Islamic University Journal, Series of Natural Studies and Engineering*, v. 14, p. 1–32, 2006.
- HAWKINS, T. *Lebesgue's theory of integration: its origins and development*. 2. ed. Providence: American Mathematical Society, 1975.
- HENSTOCK, R. Definitions of riemann type of the variational integrals. *Proceedings of the London Mathematical Society*, Oxford University Press, v. 3, n. 1, p. 402–418, 1961.
- HENSTOCK, R. Integration in product spaces, including wiener and feynman integration. *Proceedings of the London Mathematical Society*, Oxford University Press, v. 3, n. 2, p. 317–344, 1973.
- HENSTOCK, R. *Lectures on the Theory of Integration*. Singapore: World Scientific, 1988.
- HENSTOCK, R. *The general theory of integration*. New York: Oxford University Press, 1991.
- HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Linear Algebra*. New Jersey: Prentice-Hall, 1991.
- JONES, F. *Lebesgue integration on Euclidean space*. London: Jones & Bartlett Learning, 2001.
- KLYMCHUK, S. *Counterexamples in calculus*. Washington: Mathematical Association of America, 2010.
- KORALOV, L. B.; SINAI, Y. G. *Theory of probability and random processes*. 2. ed. Berlin: Springer, 2007.

-
- KURTZ, D. S.; SWARTZ, C. W. *Theories of Integration - The Integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil, and McShane*. Singapore: World Scientific, 2004.
- KURZWEIL, J. Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter. *Czechoslovak Mathematical Journal*, Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Czech Republic, v. 7, n. 3, p. 418–449, 1957.
- KURZWEIL, J. *Henstock-Kurzweil integration: its relation to topological vector spaces*. Singapore: World Scientific, 2000.
- KURZWELL, J. *Integration between the Lebesgue integral and the Henstock-Kurzweil integral*. Singapore: World Scientific, 2002.
- LEBESGUE, H. L. Sur une généralisation de l'intégrale définie. *C. R. Acad. Sci. Paris*, v. 132, p. 1025–1028, 1901.
- LEBESGUE, H. L. Intégrale, longueur, aire. *Annali di matematica pura ed applicata*, Springer, v. 7, n. 1, p. 231–359, 1902.
- LEBESGUE, H. L. *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*. Paris: Gauthier-Villars, 1904.
- LEVI, B. Sopra l'integrazione delle serie. *Rend. Ist. Lombardo Sci. Lett*, v. 2, n. 39, p. 775–780, 1906.
- LIMA, E. L. *Análise real, vol. 1*. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.
- LIMA, E. L. *Curso de análise, vol. 1*. 14. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.
- LIMA, E. L. *Espaços métricos*. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.
- LUZIN, N. N. Sur les propriétés de l'intégrale de m. denjoy. *C. R. Acad. Sci. Paris*, v. 155, p. 1475–1478, 1912.
- MAWHIN, J. *Analyse. Fondements, techniques, évolution*. 2. ed. Paris-Bruxelles: De Boeck Université, 1997.
- MCINNIS, E. O. *Gauge Integration*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Naval Postgraduate School, Monterey, 2002.
- MCLEOD, R. M. *The generalized Riemann integral, Carus Math.* [Washington]: Mathematical Association of America, 1980.
- MCSHANE, E. J. *A Riemann-type integral that includes Lebesgue-Stieltjes, Bochner and stochastic integrals*. Providence: American Mathematical Society, 1969.
- MCSHANE, E. J. A unified theory of integration. *American Mathematical Monthly*, Mathematical Association of America, Washington, v. 80, n. 4, p. 349–359, 1973.
- MCSHANE, E. J. *Unified integration*. Orlando: Academic Press, 1983.
- MEDEIROS, L. A.; MELLO, E. A. de. *A integral de Lebesgue*. 6. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2008.

-
- PERRON, O. Über den integralbegriff. *Sitzber', Heidelberg Akad. Wiss., Math-Naturw. Klasse Abt. A*, n. 16, p. 1–16, 1914.
- PFEFFER, W. F. A note on the generalized riemann integral. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 103, n. 4, p. 1161–1166, 1988.
- RICHARDSON, L. F. *Advanced calculus: an introduction to linear analysis*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2008.
- RIEMANN, B.; DEDEKIND, R. Über die darstellbarkeit einer funktion durch eine trigonometrische reihe. *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, In der Dieterichschen Buchhandlung, v. 13, 1867. Transcrito por D. R. Wilkins em 2000. Disponível em: <<http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Trig/>>. Acesso em: 23 out. 2015.
- RIESZ, F. Untersuchungen über systeme integrierbarer funktionen. *Mathematische Annalen*, Springer, v. 69, n. 4, p. 449–497, 1910.
- RIESZ, F. Sur l'intégrale de lebesgue. *Acta mathematica*, Springer, v. 42, n. 1, p. 191–205, 1920.
- ROSELLI, P. The riesz approach to the lebesgue integral and complete function spaces. *Real Analysis Exchange*, Michigan State University Press, v. 27, n. 2, p. 635–660, 2001.
- ROYDEN, H. L. *Real analysis*. 3. ed. New York: Macmillan Publishing, 1988.
- RUDIN, W. *Principles of Mathematical Analysis*. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 1976.
- SAKS, S. *Theory of the Integral*. 2. ed. revisada. New York: Hafner, 1937. Traduzido para inglês por L. C. Young.
- SPIVAK, M. D. *Calculus*. 3. ed. Houston: Publish or Perish, 1994.
- STEEN, L. A.; Seebach Jr., J. A. *Counterexamples in topology*. 2. ed. New York: Dover Publications, 1995.
- STIELTJES, T.-J. Recherches sur les fractions continues. In: *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques*. Toulouse: Université Paul Sabatier, 1894. v. 8, n. 4, p. 1–122.
- THOMSON, B. S. *Theory of the Integral*. [S.l.]: ClassicalRealAnalysis.com, 2012. ISBN 9781467924399.
- TIKARE, S. A. *A study of certain aspects of gauge integrals and integral transforms*. Tese (Tese de Doutorado) — Shivaji University, Department of Mathematics, Kolhapur, 2011.
- VALLIN, R. W. *The elements of Cantor sets: With applications*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2013.
- VOLTERRA, V. Sui principii del calcolo integrale. *Giornale di Matematiche*, Göttinger Digitalisierungszentrum, Göttingen, v. 19, p. 333–372, 1881.

YEE, L. P. The integral à la henstock. *Scientiae Mathematicae Japonicae Online*, International Society of Mathematical Sciences, p. 763–771, 2007.

YEE, L. P.; VÝBORNÝ, R. *Integral: an easy approach after Kurzweil and Henstock*. New York: Cambridge University Press, 2000.

Apêndice A

Limitantes

Durante todo o texto utilizamos conceitos e propriedades de supremo, ínfimo, cotas e etc., sem mencionar qualquer resultado a respeito dos mesmos. Neste apêndice, abordaremos brevemente os principais resultados concernentes a estes conceitos. Mais detalhes e demonstrações podem ser encontrados em Lima (2013a; 2013b).

Considere $X \subset \mathbb{R}$. Uma *cota* (ou *limitante*) *superior* para X é um elemento $M \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq M$, para todo $x \in X$. Dizemos que M é o *supremo* de X , e escrevemos $M = \sup X$, se for a menor das cotas superiores de X , isto é, se $M' \in \mathbb{R}$ é tal que $M' < M$, então existe $x \in X$ com $M' < x$. De modo análogo define-se o ínfimo $m = \inf X$ de X como sendo a maior das cotas inferiores.

Dizemos que $X \subseteq \mathbb{R}$ é *limitado superiormente* quando possui uma cota superior. Analogamente, X é *limitado inferiormente* quando possui uma cota inferior. Quando $X \subset \mathbb{R}$ possui cota superior e inferior, X é dito *limitado*. É imediato que X é limitado se e somente se existe M tal que $|x| < M$ para todo $x \in X$.

Uma função $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *limitada* quando sua imagem $f(X) \subset \mathbb{R}$ é um conjunto limitado. Se é limitada, o *supremo* e o *ínfimo* de f correspondem ao supremo e o ínfimo de sua imagem $f(X)$, os quais expressaremos com a notação $\sup f$ e $\inf f$, ou, quando for conveniente,

$$\sup_{x \in X} f(x) \quad \text{e} \quad \inf_{x \in X} f(x).$$

O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é um *corpo ordenado completo*. O fundamental aspecto da completude¹ provém do seguinte axioma:

Primeiro Axioma de Completude. Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ limitado superiormente admite supremo.

Proposição A.1. Se $A \subset \mathbb{R}$ é limitado inferiormente, então o conjunto

$$-A = \{-a \in \mathbb{R}; a \in A\}$$

é limitado superiormente.

Como consequência desta proposição e do Primeiro Axioma de Completude, obtemos a versão para ínfimos do primeiro axioma. Embora seja um teorema, o enunciaremos como o

¹Observe, este conceito de completude é compatível com a definição de espaço métrico completo que introduzimos na Seção 1.7.

Segundo Axioma de Completude. Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ limitado inferiormente admite ínfimo.

Estes axiomas fundamentam toda o desenvolvimento da Análise Matemática e são, por esse motivo, imprescindíveis em qualquer forma de desenvolvimento desta teoria.

Segue-se dos axiomas de completude que, em qualquer conjunto limitado, $\sup$ e $\inf$ sempre existem como números reais e, como tais, satisfazem algumas propriedades operatórias. Antes de enunciá-las, é necessário realizar alguns acréscimos na notação.

Dados dois conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$, definimos a *soma* e o *produto* destes conjuntos respectivamente por

$$A + B = \{a + b \in \mathbb{R}; a \in A \text{ e } b \in B\} \quad \text{e} \quad A \cdot B = \{a \cdot b \in \mathbb{R}; a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Dados $A \subset \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ (um escalar), o *produto por escalar* será definido por

$$\lambda A = \{\lambda a \in \mathbb{R}; a \in A\}.$$

Em particular, $-1 \cdot A = -A$.

Estabelecidas as notações, encerramos com algumas propriedades interessantes de $\sup$ e $\inf$.

Proposição A.2. *Dados $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos limitados e $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se:*

- (a) *Se $A \subset B$, então $\inf A \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup A$;*
- (b) *$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ e $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$;*
- (c) *Se A e B são conjuntos de termos positivos, então $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$ e $\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B$;*
- (d) *Se $\lambda \geq 0$, então λA é limitado e tem-se $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$ e $\inf(\lambda A) = \lambda \inf A$;*
- (e) *Se $\lambda < 0$, então λA é limitado e tem-se $\sup(\lambda A) = \lambda \inf A$ e $\inf(\lambda A) = \lambda \sup A$.
Em particular, $\sup(-A) = -\inf A$.*

Apêndice B

Equivalência de definições

Na Seção 2.1 do Capítulo 2, definimos a integral de duas maneiras diferentes, e afirmamos que ambas são equivalentes. Neste apêndice daremos uma demonstração para esta afirmação.

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real **limitada**. As seguintes duas afirmações a respeito de um número real I são equivalentes:

AF1. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que $|S(P^*; f) - I| < \varepsilon$ para toda partição pontilhada $P^* = (P; \Xi)$ de $[a, b]$ tal que $|P| < \delta$.

AF2. Dado $\varepsilon > 0$ existe uma partição P_ε de $[a, b]$ tal que $|S(Q^*; f) - I| < \varepsilon$ sempre que $Q^* = (Q; \Xi)$ for uma partição pontilhada de $[a, b]$ contendo P_ε .

Demonstração. (AF1 $\Rightarrow$ AF2) Seja dado $\varepsilon > 0$. Então existe $\delta > 0$ satisfazendo AF1. Escolhendo uma partição P_ε de $[a, b]$ com $|P_\varepsilon| < \delta$, segue-se que, para toda partição pontilhada $Q^* = (Q; \Xi)$ tal que $Q \supset P_\varepsilon$, temos $|Q| \leq |P_\varepsilon| < \delta$, donde $|S(Q^*; f) - I| < \varepsilon$ em virtude de AF1. Isto completa a primeira parte.

(AF2 $\Rightarrow$ AF1) Seja dado $\varepsilon > 0$. Em virtude de AF2, existe uma partição P_ε de $[a, b]$, digamos,

$$P_\varepsilon = \{a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b\},$$

tal que, para toda partição pontilhada Q^* de $[a, b]$,

$$Q \supset P_\varepsilon \Rightarrow |S(Q^*; f) - I| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (\text{B.1})$$

Além disso, como f é limitada, existe $M = \sup\{f(x) \in \mathbb{R}; x \in [a, b]\}$. Tomando $\delta = \varepsilon/(8Mn)$, seja P^* uma partição pontilhada qualquer de $[a, b]$ satisfazendo $|P| < \delta$. Façamos $Q_\varepsilon = P \cup P_\varepsilon$ e consideremos nesta nova partição pontilhamentos idênticos aos da partição P^* nos intervalos que esta última têm em comum com Q_ε . Nos demais intervalos podemos fixar um pontilhamento qualquer.

Na reunião $Q_\varepsilon = P \cup P_\varepsilon$, a partição Q_ε tem no máximo $n - 1$ pontos a mais do que P (a pior hipótese ocorre quando $P \cap P_\varepsilon = \{a, b\}$). Como cada ponto $a_i \in P_\varepsilon \setminus P$ acrescenta um novo intervalo a Q_ε , supondo a pior das hipóteses, os $n - 1$ intervalos de P que continham pontos de P_ε em seus interiores geraram mais $n - 1$ intervalos em Q_ε . Os demais intervalos de P coincidem com os de Q_ε . Isto nos permite concluir que Q_ε tem, no máximo, $(n - 1) + (n - 1) = 2(n - 1)$ intervalos que não coincidem com os de P . Observe que, como estes intervalos não coincidem pelo fato de serem mais “refinados”

do que os de P mas têm pontos extremos em comum, podemos “diluir” os intervalos de P em parcelas cujas diferenças $(x_i - x_{i-1})$ da soma de Cauchy se assemelhem.¹ Assim, como os intervalos coincidentes anulam as parcelas (por terem mesmo pontilhamento), a diferença $S(Q_\varepsilon^*; f) - S(P^*; f)$ consiste de, no máximo, $2(n-1)$ parcelas da forma $\pm[f(\xi) - f(\alpha)](x - y)$, onde $|x - y| \leq |P| < \delta$. Daí, como $|f(\xi) - f(\alpha)| \leq 2M$ para quaisquer $\xi, \alpha \in [a, b]$,

$$|S(Q_\varepsilon^*; f) - S(P^*; f)| < 2(n-1)2M\delta = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (\text{B.2})$$

Por outro lado, como $Q_\varepsilon = P \cup P_\varepsilon \supset P_\varepsilon$, a partição Q_ε satisfaz (B.1), ou seja,

$$|S(Q^*; f) - I| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (\text{B.3})$$

De (B.2) e (B.3), temos

$$|S(P^*; f) - I| \leq |S(P^*; f) - S(Q_\varepsilon^*)| + |S(Q_\varepsilon^*) - I| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Isto conclui a demonstração. ■

¹Por exemplo, $f(\alpha)(x_3 - x_1) = f(\alpha)(x_3 - x_2 + x_2 - x_1) = f(\alpha)(x_3 - x_2) + f(\alpha)(x_2 - x_1)$.

Índice Remissivo

- Ínfimo de
 - um conjunto, 120
 - uma função, 120
- Amplitude de um intervalo, 39
- Análise de Fourier, 60, 88
- Antiderivada, 25
- Argumento da diagonal de Cantor, 42
- Arquimedes de Siracusa, 24
- Arzelà, Cesare, 88
- Axiomas de Completude, 120, 121
- Berkeley, George, 25
- Bernoulli, Daniel, 25
- Cálculo
 - clássico do π , 24
 - diferencial e integral, 25
- Calibre sobre um intervalo, 103
- Cantor, Georg Ferdinand Ludwig Philipp, 41
- Cauchy, Augustin-Louis, 25
- Classe
 - $\bar{\mathcal{R}}[a, b]$, 93
 - $\mathcal{C}[a, b]$, 23
 - $\mathcal{D}[a, b]$, 51, 73, 93
 - $\mathcal{R}[a, b]$, 32, 72
 - $L[a, b]$, 75, 76
 - $L^+[a, +\infty]$, 96
 - $L^+[a, b]$, 70
 - de equivalência de uma função, 93
 - de funções equivalentes, 90
 - integrável, 93
- Cobertura
 - aberta, 16
 - de um conjunto, 16
 - enumerável, 16
 - finita, 16
- Completamento de um espaço métrico, 57
- Comprimento de um intervalo, 39
- Conjunto
 - aberto, 15
 - compacto, 15
 - de Cantor, 41
 - generalizado, 44, 45
 - ternário, 41, 42
 - de medida nula, 39
 - de Smith–Volterra–Cantor, 45
 - denso em outro, 16
 - dos números reais estendidos, 97
 - fechado, 15
 - limitado, 120
 - inferiormente, 120
 - superiormente, 120
 - mensurável, 79
 - produto, 121
 - por escalar, 121
 - soma, 121
- Convergência
 - monótona, 67
 - ponto-a-ponto, 21
 - quase sempre, 65
 - simples, 21
 - uniforme, 21
- Cota
 - inferior, 120
 - superior, 120
- Critério
 - de Cauchy, 28
 - de Comparação, 15
 - para integrais, 95
- d’Alembert, Jean le Rond, 25
- Darboux, Jean-Gaston, 33
- Dedekind, Julius Wilhelm Richard, 32
- Denjoy, Arnaud, 99
- Derivada, 20
 - n-ésima, 20
- Dirichlet, Peter Gustav Lejeune, 32
- Distância entre pontos, 21
- Espaço
 - de Banach, 89

-
- métrico, 22
 - completo, 23
 - vetorial, 89
 - normado, 89
 - seminormado, 89
 - Eudoxo de Cnido, 24
 - Euler, Leonhard, 25
 - Expansão de um número numa base, 41
 - Fórmula de Newton-Leibniz, 25
 - Fatou, Pierre Joseph Louis, 88
 - Fecho de um conjunto, 16
 - Fischer, Ernst Sigismund, 90
 - Fourier, Jean-Baptiste Joseph, 25
 - Função
 - n vezes derivável, 20
 - característica, 62
 - contínua, 19
 - de classe C^1 , 20
 - de classe C^n , 20
 - de Dirichlet, 51
 - de Thomae, 45
 - de Volterra, 54, 55
 - degrau, 61
 - derivável, 20
 - derivada, 20
 - integrável
 - a Cauchy, 27
 - a Denjoy (totalizável), 99
 - a Henstock-Kurzweil, 104
 - a Lebesgue, 76
 - a Newton, 25
 - a Perron, 100
 - a Riemann, 32
 - a Riemann-Darboux, 35
 - limitada, 120
 - mínimo, 63
 - máximo, 63
 - mensurável, 77
 - que domina outra, 79, 86
 - seccionalmente contínua, 30
 - tipo-Dirichlet, 51
 - uniformemente contínua, 19
 - Funções
 - componentes, 75
 - equivalentes, 90
 - Generalização de uma integral, 53
 - Henstock, Ralph, 100
 - Igualdade quase sempre, 65
 - Integração termo-a-termo, 52
 - Integral
 - absoluta, 79, 109
 - de Cauchy, 27
 - de Denjoy, 99
 - de Dirichlet, 95
 - de Henstock-Kurzweil, 104
 - aproximadamente contínua, 113
 - de Khinchin, 113
 - de Lebesgue, 76
 - de uma função escada, 64
 - em $L^+[a, b]$, 70
 - de Lebesgue-Stieltjes, 98
 - de McShane, 109
 - de Newton, 25
 - de Perron, 100
 - aproximadamente contínua, 113
 - de Riemann, 32
 - de uma classe integrável, 93
 - Generalizada, 104
 - de Riemann-Darboux, 35
 - de Riemann-Stieltjes, 38
 - definida, 25, 27, 32
 - imprópria
 - absolutamente convergente, 95
 - de Cauchy, 31
 - de Henstock-Kurzweil, 105
 - de Lebesgue, 95
 - de Riemann, 32
 - inferior
 - de Darboux, 34
 - de Darboux-Stieltjes, 38
 - não-absoluta, 99
 - superior
 - de Darboux, 34
 - de Darboux-Stieltjes, 38
 - tipo-Stieltjes, 38
 - Interior de um conjunto, 15
 - Khinchin, Aleksandr Yakovlevich, 113
 - Lagrange, Joseph-Louis, 25
 - Lebesgue, Henri Léon, 38, 59
 - Leibniz, Gottfried Wilhelm von, 25
 - Lema de Fatou, 88
 - Lemas Fundamentais, 65
 - Levi, Beppo, 81
 - Limite

à direita, 18
 à esquerda, 18
 de somas de Cauchy, 26, 27
 de uma função, 17
 de uma sequência, 14
 sob uma métrica (d -limite), 22
 inferior, 46
 infinito, 18
 lateral, 18
 no infinito, 18
 superior, 46
 Luzin, Nikolai Nikolaevich, 99
 Método de Exaustão, 24
 Métrica, 21
 canônica de $\mathbb{R}$, 22
 natural de um espaço normado, 89
 usual de $\mathbb{R}$, 22
 zero-um, 22
 McShane, Edward James, 109
 Medida
 de Lebesgue, 40, 79
 de um intervalo, 40, 79
 externa de Lebesgue, 40
 nula (ou zero), 39
 Número algébrico, 66
 Newton, Sir Isaac, 25
 Norma
 de uma partição, 26
 em um espaço vetorial, 89
 Oscilação de uma função
 em um conjunto, 46
 em um ponto, 47
 Parte positiva (e negativa) de uma função, 63
 Partição, 25
 δ -fina, 103
 associada, 61
 pontilhada, 26
 subordinada a um calibre, 103
 Perron, Oskar, 100
 Pontilhamento
 de uma partição, 26
 médio, 26
 Ponto, 21
 de acumulação, 16
 à direita, 16
 à esquerda, 16
 bilateral, 16
 interior, 15
 próximo de outro, 18
 Primeiro Lema Fundamental, 67
 Primitiva, 25
 Princípio dos Intervalos Encaixados, 17
 Propriedade válida quase sempre, 65
 Quase sempre, 65
 Refinamento de uma partição, 26
 Regra da cadeia, 20
 Representante de uma classe de funções, 90
 Riemann, Georg Friedrich Bernhard, 31
 Riesz, Frigyes, 60
 Série
 absolutamente convergente, 15
 convergente, 15
 de funções, 21
 de números reais, 15
 dupla, 41
 Segundo Lema Fundamental, 69
 Seminorma, 89
 Sequência
 convergente, 14
 sob uma métrica, 22
 de Cauchy em um espaço métrico, 23
 de funções, 21
 monotonamente convergente, 67
 pontualmente convergente, 21
 simplesmente convergente, 21
 uniformemente convergente, 21
 de números reais, 14
 de pontos em um espaço métrico, 22
 integrante, 70
 Smith, Henry John Stephen, 45
 Soma
 de Cauchy, 26
 inferior, 33
 superior, 33
 Stieltjes, Thomas Joannes, 38
 Subcobertura, 16
 Supremo de
 um conjunto, 120
 uma função, 120
 Teorema
 da Convergência

Dominada, 86, 87
Limitada, 88
Monótona, 83
de Arzelà, 88
de Beppo Levi, 81, 82
de Borel-Lebesgue, 17
de Riesz-Fischer, 90
de Weierstrass, 19
do Sanduíche para
 Funções, 18
 Sequências, 15
do Valor
 Intermediário, 20
 Médio, 20
Fundamental do Cálculo, 25, 107
 de Cauchy, 30
 de Henstock-Kurzweil, 107
 de Lebesgue, 98
 de Riemann, 37
Teste da Razão, 15

Vizinhança de um ponto, 15
Volterra, Vito, 45, 54