

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CAMPUS DE ARAPIRACA
CURSO DE MATEMÁTICA LICENCIATURA

RODRIGO MATTHEUS SILVA LIMA

Métrica Funk e suas Aplicações

Arapiraca
2019

RODRIGO MATTHEUS SILVA LIMA

Métrica Funk e suas Aplicações

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao corpo docente do Curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Alagoas - UFAL, *Campus* de Arapiraca, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rinaldo Vieira da Silva Junior

Arapiraca
2019

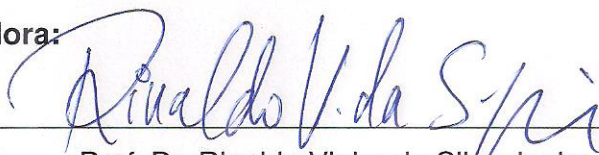
RODRIGO MATTHEUS SILVA LIMA

Métrica Funk e suas Aplicações

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao corpo docente do Curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Alagoas - UFAL, *Campus* de Arapiraca, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

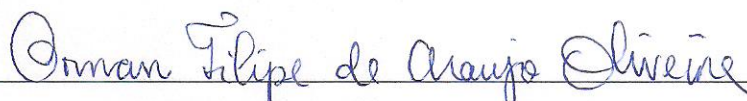
Orientador: Prof. Dr. Rinaldo Vieira da Silva Junior

Banca Examinadora:



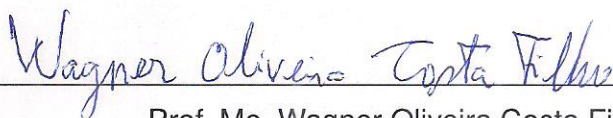
Prof. Dr. Rinaldo Vieira da Silva Junior

Orientador



Prof. Me. Ornan Filipe de Araújo Oliveira

Examinador



Prof. Me. Wagner Oliveira Costa Filho

Examinador

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me permitido chegar até aqui. Aos meus pais Cláudio e Monica, a minha irmã Emilly, por todo apoio em todos os sentidos durante meu caminho, e todos os demais familiares, em especial a minha madrinha Fátima, agradeço por todo amor, força, incentivo e apoio ao longo de toda a minha vida. Agradeço ao meu avô João que me fez gostar da matemática e que infelizmente acabou falecendo enquanto eu estava na faculdade.

Agradeço aos meus amigos: Carlos Henrique, Danilo Vitor, Deivid Santos, Gilmar Batista, Rodrigo Costa e Samuel Araújo, as risadas, que compartilharam comigo nessa etapa tão desafiadora da vida acadêmica, também fizeram toda a diferença. Com o grupo de estudo formado me ajudaram a obter um melhor aproveitamento acadêmico e me ajudaram a desenvolver este trabalho. Aqueles amigos e colegas de sala que estudei junto por quatro anos: Aline, Cássia, Jonathan, Juci, Leiziane, Tati, Carol e Nathan.

Agradeço ao meu Orientador Prof. Dr. Rinaldo, por sempre me apoiar e incentivar durante o curso a participar de pesquisas que contribuíram muito para minha formação. Aos professores Rinaldo, Ornan, Wagner, Fábio Bóia, Eben, Vanessa, José Arnaldo, Ademária e José Barros, e todos os outros que participaram da minha formação.

Por fim, à banca examinadora, por ter aceitado o convite de avaliar este trabalho.

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de apresentar a métrica Funk em um domínio estritamente convexo e suas aplicações, mostrando conceitos básicos de Espaços Métricos e Geometria Diferencial, incluindo métrica, estudo de geodésicas e curvas parametrizadas. Para isso, iremos mostrar como se comporta a geodésica dessa métrica, como ela pode ser vista do ponto de vista projetivo, como as bolas da métrica podem ser de diferentes tamanhos e formatos e diferentemente da métrica usual elas não são simétricas. Apresentaremos uma métrica que apesar de ser parecida com a métrica funk tem algumas diferenças significativas. E também mostraremos como a métrica Funk pode se relacionar com outras áreas da geometria.

Palavras-chave: Métrica Funk. Geometria Diferencial. Espaços Métricos.

ABSTRACT

The objective of this work is to present the Funk metric in a strictly convex domain and its applications, showing basic concepts of Metric Spaces and Differential Geometry, including metrics, study of geodesics and parametrized curves. For this, we will show how the geodesic of this metric behaves, how this metric can be seen from the projective point of view, how the balls of the metric can be of different sizes and formats and unlike the usual metric they are not symmetrical. We will present a metric that, although similar to the funk metric, has some significant differences. And we'll also show how the Funk metric can relate to other areas of geometry.

Keywords: Funk Metric. Differential Geometry. Metric Spaces.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Representação da Propriedade 2.1.	21
Figura 2 – Representação da Propriedade 2.2.	22
Figura 3 – Representação da Propriedade 2.3.	22
Figura 4 – Representação da Propriedade 2.4.	23
Figura 5 – Hélice circular.	25
Figura 6 – Curva com vértice.	26
Figura 7 – Catenária.	26
Figura 8 – Curva de Viviani.	27
Figura 9 – Curva com auto-inserção.	27
Figura 10 – Curva circunferência.	28
Figura 11 – Curva com cúspide.	29
Figura 12 – Esfera.	33
Figura 13 – Cone duplo.	34
Figura 14 – Hiperbolóide de uma folha.	35
Figura 15 – Métrica Funk.	38
Figura 16 – Exemplo da métrica Funk na bola unitária euclidiana.	43
Figura 17 – Métrica Funk Inversa.	44
Figura 18 – Representação das bolas da métrica Funk.	46
Figura 19 – Métrica Hilbert.	49

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	ESPAÇOS MÉTRICOS	10
2.1	Métricas	10
2.1.1	Espaço Métrico	10
2.2	Distância de um Ponto a um Conjunto	18
2.3	Bolas e Esferas	19
2.3.1	Definições de Bola Aberta, Bola Fechada e Esfera	19
2.3.2	Propriedades Gerais das Bolas Abertas	21
3	GEOMETRIA DIFERENCIAL	24
3.1	Curvas Regulares	27
3.1.1	Reparametrização	29
3.1.2	Comprimento de arco	30
3.1.3	Reparametrização pelo comprimento de arco	30
3.2	Superfícies Regulares	32
3.2.1	Superfície de Revolução	32
3.2.2	Plano Tangente	35
3.3	Geodésica	36
4	MÉTRICA FUNK	38
4.1	Métrica Funk	38
4.2	Métrica Funk Inversa	43
4.3	Geometria das Bolas	44
4.4	Geodésica	47
4.5	Ponto de vista projetivo	48
5	APLICAÇÕES DA MÉTRICA FUNK	49
5.1	Métrica Hilbert	49
5.2	Métrica Finsler	50
6	CONCLUSÃO	52
	REFERÊNCIAS	53
	APÊNDICE A ÍNFINITO E SUPREMO	54

1 INTRODUÇÃO

Em 1929, Funk introduziu uma estrutura tautológica de Finsler, é a estrutura que a bola unitária em um ponto x pertencente ao domínio é o próprio domínio, mas com o ponto x sendo o centro. A partir desta estrutura é formada uma distância tautológica em um domínio estritamente convexo em $\mathbb{R}^n$, a chamada *métrica Funk*. Mas que naquele tempo não era conhecida com o nome “*métrica Funk*”, sendo assim chamada nos trabalhos posteriores de Busemann.

Com base nisso, esta pesquisa tem o intuito de apresentar a métrica Funk, estudando seus conceitos, propriedades e suas aplicações, de um conteúdo que cada vez mais tem mostrado sua importância na área da geometria.

No primeiro capítulo apresentaremos os conceitos preliminares de espaços métricos que são necessários para realizar este trabalho, como por exemplo métrica, distância de um ponto a um conjunto e bolas. No segundo capítulo mostraremos alguns conceitos de geometria diferenciável, como curvas regulares, superfícies regulares e geodésica.

No terceiro capítulo iremos apresentar as propriedades e teoremas que foram desenvolvidos nessa área, com suas devidas demonstrações e observações. No capítulo 4, será realizado uma apresentação das aplicações da métrica Funk mostrando duas métricas que estão muito relacionadas à métrica Funk. Para finalizar temos o capítulo 5, onde será feita uma conclusão do trabalho com tudo aquilo que foi aprendido durante sua realização.

Para a melhor compreensão deste trabalho é recomendado que o leitor tenha conhecimento básico em espaços métricos e geometria diferencial, recomendamos o livro Espaços Métricos de Elon Lages Lima e o livro Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies de Manfredo Perdigão do Carmo.

Também é preciso mencionar que todas as imagens apresentadas no trabalho foram desenvolvidas no software GeoGebra.

2 ESPAÇOS MÉTRICOS

Neste capítulo apresentaremos alguns conhecimentos básicos de espaços métricos como métricas, espaço métrico, subespaço de um espaço métrico, distância de um ponto a um conjunto e distância entre conjuntos. Recomendamos ao leitor, uma leitura prévia de (LIMA, 2015).

2.1 Métricas

Definição 2.1. (*Métrica*). Seja $M \neq \emptyset$. Uma *métrica* em M é uma função $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada par $(x, y) \in M \times M$ um número real $d(x, y)$, chamado a distância de x a y , de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas para quaisquer $x, y, z \in M$:

- (1) $d(x, y) \geq 0$, e $d(x, y) = d(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- (2) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Observação 2.1. $d(x, y)$ lê-se: distância de x até y .

2.1.1 Espaço Métrico

Definição 2.2. (*Espaço Métrico*). Chamamos de espaço métrico um par (M, d) onde M é um conjunto e d é uma métrica em M .

Os elementos de um espaço métrico podem ser funções, conjuntos, vetores e números. Mas nós chamaremos estes elementos de *pontos de M* . Vejamos agora alguns exemplos de espaços métricos.

Exemplo 2.1. (*Métrica zero-um*). Seja $M \neq \emptyset$, qualquer conjunto M pode tornar-se um espaço métrico. Definindo $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ 1, & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

assim, as condições (1) a (3) são facilmente verificadas.

Com efeito, veja que d satisfaz **(1)**: Se $x \neq y$, temos que $d(x, y) = 1$ e portanto $d(x, y) > 0$. Se $x = y$ então $d(x, y) = 0$, isto é $d(x, y) = 0$.

Do mesmo modo d satisfaz **(2)**: Caso $x = y \Rightarrow d(x, y) = 0 = d(y, x)$. Caso $x \neq y \Rightarrow d(x, y) = 1 = d(y, x)$.

E também d satisfaz **(3)**:

Se $x = y$ então $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ é óbvio. Se $x \neq y$ então $d(x, y) = 1 \leq d(x, z) + d(z, y)$, assim como estamos lidando com a métrica zero-um temos apenas duas opções, $x = z$ ou $x \neq z$, são elas:

- Com $x = z \Rightarrow z \neq y$, daí, $1 \leq 0 + 1$.
- Com $x \neq z \Rightarrow d(x, z) = 1$, assim, $d(z, y) = 0$ ou $d(z, y) = 1$.

Portanto, d é uma métrica em M .

Exemplo 2.2. (*Subespaço; métrica induzida*). Se (M, d) é um espaço métrico, todo subconjunto $S \subset M$ pode ser considerado como espaço métrico, para que isso aconteça é necessário considerar a restrição de d a $S \times S$, ou seja, usar entre os elementos de S a mesma distância que os mesmos possuíam como elementos de M . Deste modo, S chama-se um *subespaço* de M e a métrica de S diz-se *induzida* pela de M .

Exemplo 2.3. (*Métrica Usual em $\mathbb{R}$*). A distância entre dois pontos $x, y \in \mathbb{R}$ é dada por

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) = |x - y| \end{aligned}$$

onde as condições resultam das propriedades do módulo.

Exemplo 2.4. (*O Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$*). Há três métricas naturais em $\mathbb{R}^n$. Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ pontos de $\mathbb{R}^n$, então definimos:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$d'(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \text{ e}$$

$$d''(x, y) = \max \{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\}.$$

Logo $d, d', d'' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são métricas, pois, tomando $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ e $z = (z_1, \dots, z_n)$ em $\mathbb{R}^n$, temos:

- d é métrica.

(1): Como d é a raiz quadrada de um número não negativo, então temos que $d(x, y) \geq 0$.

$$\begin{aligned} x = y &\Rightarrow x_i = y_i, \forall i \\ &\Rightarrow x_i - y_i = 0, \forall i \\ &\Rightarrow d(x, y) = \sqrt{0^2 + \dots + 0^2} = 0. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} d(x, y) = 0 &\Rightarrow d^2(x, y) = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 = 0 \\ &\Rightarrow x_i - y_i = 0, \forall i \\ &\Rightarrow x_i = y_i, \forall i \\ &\Rightarrow x = y. \end{aligned}$$

(2): Veja que d satisfaz essa condição facilmente, segue

$$d(x, y) = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i y_i + y_i^2) \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = d(y, x).$$

Para provarmos (3), precisamos estabelecer primeiro a *Desigualdade de Cauchy-Schwarz* em $\mathbb{R}^n$ cujo enunciado é o seguinte: Se $x_1, \dots, x_n$ e $y_1, \dots, y_n$ são números reais arbitrários em $\mathbb{R}^n$, então:

$$\sum_{i=1}^n |x_i \cdot y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

A desigualdade $2rs \leq r^2 + s^2$ é verdadeira para quaisquer $r, s \in \mathbb{R}$ já que $(r - s)^2 = r^2 - 2rs + s^2 \geq 0$. Assim, se fizermos $p = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ e $q = \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}$ é verdadeira a relação

$$2 \frac{|x_i|}{p} \cdot \frac{|y_i|}{q} \leq \frac{x_i^2}{p^2} + \frac{y_i^2}{q^2}, \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Assim, seguem as desigualdades:

$$\begin{aligned} 2 \frac{|x_1|}{p} \cdot \frac{|y_1|}{q} &\leq \frac{x_1^2}{p^2} + \frac{y_1^2}{q^2} \\ 2 \frac{|x_2|}{p} \cdot \frac{|y_2|}{q} &\leq \frac{x_2^2}{p^2} + \frac{y_2^2}{q^2} \\ &\vdots \leq \vdots \\ 2 \frac{|x_n|}{p} \cdot \frac{|y_n|}{q} &\leq \frac{x_n^2}{p^2} + \frac{y_n^2}{q^2} \end{aligned}$$

Somando estas desigualdades temos:

$$2 \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{p} \cdot \frac{|y_i|}{q} \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{p^2} + \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{q^2}$$

Portanto

$$\frac{2}{p \cdot q} \sum_{i=1}^n |x_i \cdot y_i| \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{p^2} + \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{q^2}$$

Como $p = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ e $q = \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2} = \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, então $p^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ e $q^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2$. Assim, substituindo p^2 e q^2 por $\sum_{i=1}^n x_i^2$ e $\sum_{i=1}^n y_i^2$, obtemos:

$$\frac{2}{p \cdot q} \sum_{i=1}^n |x_i \cdot y_i| \leq 1 + 1 = 2.$$

Deste modo

$$\sum_{i=1}^n |x_i \cdot y_i| \leq p \cdot q.$$

Logo

$$\sum_{i=1}^n |x_i \cdot y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(3): Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ e $z = (z_1, \dots, z_n)$ em $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} [d(x, y)]^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - z_i + z_i - y_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^n (x_i - z_i) \cdot (z_i - y_i) + \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos

$$\begin{aligned} [d(x, y)]^2 &\leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 + 2 \left[\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 \\ &= \left[\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2} \right]^2 \\ &= [d(x, z) + d(z, y)]^2. \end{aligned}$$

Portanto, segue que $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. Logo, d é métrica em $\mathbb{R}^n$.

- d' é métrica.

(1): De fato, $d'(x, y) \geq 0$ pois é uma soma de módulos. Temos que

$$\begin{aligned} x = y &\Rightarrow x_i = y_i, \forall i \\ &\Rightarrow x_i - y_i = 0, \forall i \\ &\Rightarrow d(x, y) = |0| + \cdots + |0| = 0. \end{aligned}$$

Veja que

$$\begin{aligned} d'(x, y) = 0 &\Rightarrow |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| = 0 \\ &\Rightarrow |x_i - y_i| = 0, \forall i \\ &\Rightarrow x_i = y_i, \forall i \\ &\Rightarrow x = y. \end{aligned}$$

(2): É fácil ver que

$$d'(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^n |y_i - x_i| = d'(y, x).$$

(3): Percebe-se que

$$\begin{aligned} d'(x, y) &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i - z_i + z_i - y_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^n |z_i - y_i| \\ &= d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

Portanto, d' é métrica em $\mathbb{R}^n$.

- d'' é métrica.

(1): De fato, é óbvio que $d''(x, y) \geq 0$. Veja que

$$\begin{aligned} d''(x, y) = 0 &\Rightarrow \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\} = 0 \\ &\Rightarrow |x_i - y_i| = 0, \forall i \\ &\Rightarrow x_i - y_i = 0, \forall i \\ &\Rightarrow x_i = y_i, \forall i \\ &\Rightarrow x = y. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} x = y &\Rightarrow x_i = y_i, \forall i \\ &\Rightarrow x_i - y_i = 0, \forall i \\ &\Rightarrow d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{0\} = 0. \end{aligned}$$

(2): Temos que

$$d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\} = \max_{1 \leq i \leq n} \{|y_i - x_i|\} = d''(y, x).$$

(3): Observe que

$$\begin{aligned} d''(x, y) &= \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\} = |x_k - y_k|, \text{ para algum } k \in \{1, \dots, n\} \\ &= |x_k - z_k + z_k - y_k| \\ &\leq |x_k - z_k| + |z_k - y_k| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - z_i|\} + \max_{1 \leq i \leq n} \{|z_i - y_i|\} \\ &= d''(x, z) + d''(z, y). \end{aligned}$$

Logo, d'' é métrica em $\mathbb{R}^n$. A métrica d é conhecida como *métrica euclidiana*, d' é chamada de *métrica da soma* e d'' é conhecida como *métrica do máximo*.

Proposição 2.1. *Sejam d , d' e d'' as métricas definidas no exemplo acima. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ então*

$$d''(x, y) \leq d(x, y) \leq d'(x, y) \leq nd''(x, y).$$

Demonstração. Seja $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ pontos de $\mathbb{R}^n$, segue que:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2},$$

$$d'(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| \text{ e}$$

$$d''(x, y) = \max \{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}, \text{ para algum } k \in \{1, \dots, n\}.$$

Provando a primeira desigualdade:

$$\begin{aligned} d''(x, y) &= |x_k - y_k|, \text{ para algum } k \in \{1, \dots, n\} \\ &= \sqrt{(x_k - y_k)^2} \\ &\leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \\ &= d(x, y). \end{aligned}$$

Logo, $d''(x, y) \leq d(x, y)$.

Para demonstrar a segunda desigualdade, usaremos o princípio da indução para provar a seguinte igualdade:

$$(|x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|)^2 = |x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2 + \sum_{i \neq j} 2|x_i - y_i||x_j - y_j|, \quad i, j \in I_n \quad (2.1)$$

onde $I_n = \{p \in \mathbb{N}; p \leq n\}$.

Observe que é válido para $n = 1$, pois

$$n = 1 \Rightarrow |x_1 - y_1|^2 = |x_1 - y_1|^2.$$

Veja que não aparece o somatório do segundo membro de (2.1), pois, caso ele aparecesse teríamos

$$|x_1 - y_1|^2 + \sum_{i \neq j} 2|x_i - y_i||x_j - y_j|, \quad i, j \in \{1\}$$

o que é um absurdo, pois não podemos ter $i \neq j$ e $i, j \in \{1\}$.

Agora, suponhamos que (2.1) vale para $n = k$, e mostraremos que (2.1) vale para $n = k + 1$. Assim, consideremos:

- i) $[(|x_1 - y_1| + \cdots + |x_k - y_k|) + |x_{k+1} - y_{k+1}|]^2$;
- ii) $(|x_1 - y_1| + \cdots + |x_k - y_k|)^2 + 2 (|x_1 - y_1| + \cdots + |x_k - y_k|) |x_{k+1} - y_{k+1}| + |x_{k+1} - y_{k+1}|^2$;
- iii) $|x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_k - y_k|^2 + \sum_{i \neq j} 2|x_i - y_i||x_j - y_j| + |x_{k+1} - y_{k+1}|^2 +$
 $+ 2 |x_1 - y_1| |x_{k+1} - y_{k+1}| + \cdots + 2 |x_k - y_k| |x_{k+1} - y_{k+1}|$; $i, j \in I_k$;
- iv) $|x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_k - y_k|^2 + |x_{k+1} - y_{k+1}|^2 + \sum_{i \neq j} 2|x_i - y_i||x_j - y_j|$; $i, j \in I_{k+1}$.

Assim podemos ver que $i) = ii)$, além disso, $ii) = iii)$ pela hipótese de indução, é fácil ver que $iii) = iv)$, com isso, $i) = iv)$. Portanto, (2.1) vale para $n = k + 1$, daí, pelo princípio da indução (2.1) vale para todo $n \in \mathbb{N}$. Então agora vamos provar a segunda desigualdade, segue:

$$\begin{aligned} [d'(x, y)]^2 &= (|x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|)^2 \\ &= |x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2 + \sum_{i \neq j} 2|x_i - y_i||x_j - y_j| \\ &\geq |x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2 \\ &= [d(x, y)]^2. \end{aligned}$$

Portanto, $[d(x, y)]^2 \leq [d'(x, y)]^2$, assim $d(x, y) \leq d'(x, y)$, pois, d e d' são não negativos. Para finalizar, iremos provar a terceira desigualdade. Temos que

$$\begin{aligned} d'(x, y) &= |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\} + \cdots + \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\} \\ &= n \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\} \\ &= n d''(x, y). \end{aligned}$$

Logo, $d'(x, y) \leq n d''(x, y)$. Portanto, a Proposição 2.1 está provada. $\square$

Definição 2.3. (Norma). Uma norma sobre um espaço vetorial E sobre $\mathbb{R}$ é uma função real definida por

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|\cdot\|(x) = \|x\|. \end{aligned}$$

Onde associa a cada $x \in E$ um número real não negativo, indicado por $\|x\|$ e chamado *norma de x* , de modo que, para $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

- (a) $x = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0$;
- (b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
- (c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Definição 2.4. (Espaço Vetorial Normado). Um *espaço vetorial normado* é um par $(E, \|\cdot\|)$ onde E é um espaço vetorial real e $\|\cdot\|$ é uma norma em E .

Exemplo 2.5. Dado $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, temos que $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|')$ e $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|'')$ são exemplos de espaços vetoriais normados, onde

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2} \text{ (norma euclidiana),} \\ \|x\|' &= \sum_{i=1}^n |x_i| \text{ (norma da soma), e} \\ \|x\|'' &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \text{ (norma do máximo).} \end{aligned}$$

Exemplo 2.6. Se E é um espaço vetorial normado, então $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $d(x, y) = \|x - y\|$ é uma métrica sobre E pois:

- $d(x, y) = \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x)$
- $d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)$

A métrica d obtida é chama-se *métrica induzida pela norma* dada sobre E .

Definição 2.5. (*Produto Interno*). Seja E um espaço vetorial real, o *produto interno* é uma aplicação

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \langle \cdot, \cdot \rangle(x, y) = \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

que associa a cada par $(x, y) \in E \times E$ um número real, indicado $\langle x, y \rangle$ e chamado " x escalar y ", que cumpre as seguintes condições para $x, y, z \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

- (a) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$;
- (b) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;
- (c) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
- (d) $x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle > 0$.

Exemplo 2.7. Uma norma pode ser definida a partir de um produto interno, para isso precisamos considerar $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, isto é, $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$.

Essa norma definida satisfaz as condições **(a)** e **(b)** da Definição 2.3, ela também satisfaz **(c)** visto que

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

Logo, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

2.2 Distância de um Ponto a um Conjunto

Definição 2.6. Sejam (M, d) um espaço métrico, $a \in M$ e $X \subset M$ um subconjunto não vazio de M . Definimos a *distância de a ao conjunto X* , e indicamos $d(a, X)$, o número real

$$d(a, X) = \inf \{d(a, x); x \in X\}.$$

Sabendo que $d(a, X) \geq 0$, pois, 0 é uma cota inferior de $\{d(a, x); x \in X\}$, concluímos que $d(a, X)$ está bem definido pois é um conjunto limitado inferiormente

Observação 2.2. Pela definição de infímo, temos:

- 1) $d(a, X) \leq d(a, x), \forall x \in X$;

2) Se $d(a, X) < c$ então existe $x \in X$ tal que $d(a, x) < c$.

Pela primeira propriedade $d(a, x)$ é uma cota inferior para o conjunto das distâncias de a aos pontos de X enquanto a segunda diz que nenhum número maior do que $d(a, X)$ é cota inferior desse conjunto.

Exemplo 2.8. Se $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ é um conjunto finito, então $d(a, X)$ é o menor dos n números $d(a, x_1), \dots, d(a, x_n)$.

Exemplo 2.9. Sejam $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ o círculo unitário do plano e $0 \in \mathbb{R}^2$ a origem. Então $d(0, z) = 1 \forall z \in S^1$, logo $d(0, S^1) = 1$.

Definição 2.7. Seja (M, d) um espaço métrico, dados X e Y dois subconjuntos não-vazios de M . Chamamos *distância de X a Y* e indicamos $d(X, Y)$ o número real não negativo definido da seguinte maneira:

$$d(X, Y) = \inf\{d(x, y) | x \in X \text{ e } y \in Y\}. \quad (2.2)$$

O fato de que o conjunto das distâncias $d(x, y)$, com $x \in X$ e $y \in Y$, é limitado inferiormente pelo número 0 garante a existência de $d(X, Y)$ para quaisquer subconjuntos não vazios $X, Y \in M$.

2.3 Bolas e Esferas

O conceito de bola a ser apresentado a seguir tem um papel fundamental na teoria dos espaços métricos.

2.3.1 Definições de Bola Aberta, Bola Fechada e Esfera

Definição 2.8. (Bola Aberta). Seja a um ponto de um espaço métrico (M, d) . Sendo $r > 0$ um número real, a *bola aberta* de centro a e raio r é o conjunto

$$B(a; r) = \{x \in M; d(x, a) < r\}.$$

Definição 2.9. (Bola Fechada). Seja a um ponto de um espaço métrico (M, d) . Sendo $r > 0$ um número real, a *bola fechada* de centro a e raio r é o conjunto

$$B[a; r] = \{x \in M; d(x, a) \leq r\}.$$

Definição 2.10. (Esfera). Seja a um ponto de um espaço métrico (M, d) . Sendo $r > 0$ um número real, a *esfera* de centro a e raio r é o conjunto

$$S(a; r) = \{x \in M; d(x, a) = r\}.$$

Observe que

$$B[a; r] = B(a; r) \cup S(a; r).$$

Quando d provém de uma norma no espaço vetorial E , podemos escrever da seguinte forma

- $B(a; r) = \{x \in E; \|x - a\| < r\}$,
- $B[a; r] = \{x \in E; \|x - a\| \leq r\}$
- $S(a; r) = \{x \in E; \|x - a\| = r\}$.

Observação 2.3. Seja X um subespaço do espaço métrico M . Para cada $a \in X$ e cada $r > 0$, seja $B_X(a; r)$ a bola aberta de centro a e raio r , relativamente à métrica induzida em X . Então

$$B_X(a; r) = B(a; r) \cap X.$$

Analogamente, valem $B_X[a; r] = B[a; r] \cap X$ e $S_X(a; r) = S(a; r) \cap X$.

Exemplo 2.10. Considere o espaço métrico M munido da métrica zero-um. Então, para todo $a \in M$ segue que

- Se $r > 1$ então $B(a; r) = B[a; r] = M$ e $S(a; r) = \emptyset$;
- Se $r < 1$ então $B(a; r) = B[a; r] = \{a\}$ e $S(a; r) = \emptyset$;
- Se $r = 1$ então $B(a; 1) = \{a\}$, $B[a; 1] = M$ e $S(a; 1) = M - \{a\}$.

Exemplo 2.11. Na reta real a bola aberta de centro $a \in \mathbb{R}$ e raio r é o conjunto

$$\begin{aligned} B(a; r) &= \{x \in \mathbb{R}; |x - a| < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}; -r < x - a < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}; a - r < x < a + r\} \\ &= (a - r, a + r). \end{aligned}$$

Do mesmo modo, a bola fechada é $B[a; r] = [a - r, a + r]$ e a esfera é somente os pontos $S(a; r) = \{a - r, a + r\}$.

Definição 2.11. (*Ponto Isolado*). Sendo (M, d) um espaço métrico, um ponto $x \in M$ é chamado de ponto isolado de M quando ele é uma bola aberta em M , isto é, existe $r > 0$ tal que $B(x; r) = \{x\}$.

Definição 2.12. (*Conjunto Discreto*). Seja M um espaço métrico. Chamamos M de conjunto discreto quando todo ponto de M é isolado.

Exemplo 2.12. Com a métrica zero-um, todo ponto de M é ponto isolado, visto que, tomando $r = \frac{1}{2} < 1$ e $x \in M$ temos $B(x; r) = \{x\}$. Portanto, a métrica zero-um é discreta.

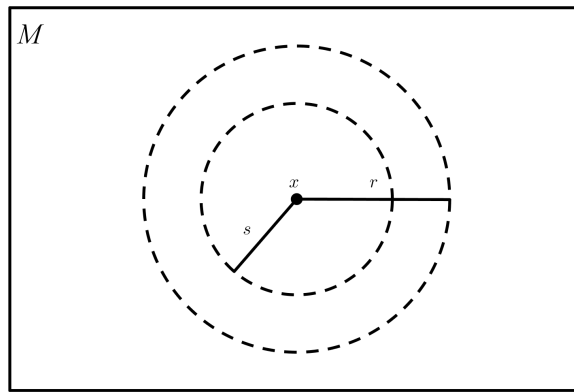
Exemplo 2.13. Seja $\mathbb{Z} = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ com a métrica induzida pela usual de $\mathbb{R}$, temos que todo ponto de $\mathbb{Z}$ é isolado, pois, com $r = 1$ temos que para $x \in \mathbb{Z}$ tal que $x \in B(n; 1)$ então $|x - n| < 1$ e portanto $x = n$.

2.3.2 Propriedades Gerais das Bolas Abertas

Agora apresentaremos algumas propriedades das bolas abertas $B(x, r)$ em um espaço métrico arbitrário (M, d) .

Propriedade 2.1. Dadas $B(x; r)$ e $B(x; s)$, se $r \leq s$ então $B(x; r) \subseteq B(x; s)$.

Figura 1: Representação da Propriedade 2.1.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Demonstração. Como $y \in B(x; r)$, temos que $d(x, y) < r$. Também sabemos que $r \leq s$, assim chegamos a conclusão que $d(x, y) < s$ e daí $y \in B(x; s)$. $\square$

Propriedade 2.2. Dado $y \in B(x; r)$, então existe $s > 0$ de maneira que $B(y; s) \subset B(x; r)$.

Demonstração. Tomemos $s = r - d(x, y)$ e mostremos que $B(y; s) \subset B(x; r)$. Seja $z \in B(y, s)$, pela desigualdade triangular temos que

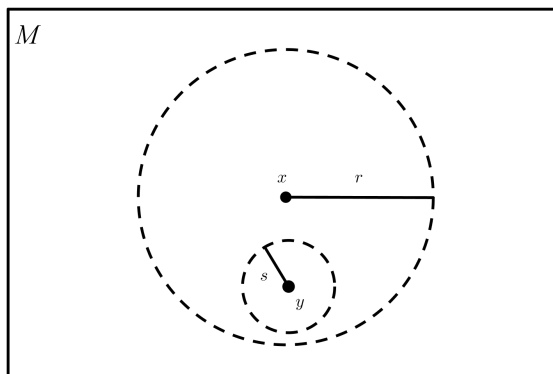
$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

também sabemos que $d(y, z) < s = r - d(x, y)$, então

$$d(x, z) < r - d(x, y) + d(x, y) = r.$$

Logo $z \in B(x; r)$. $\square$

Figura 2: Representação da Propriedade 2.2.

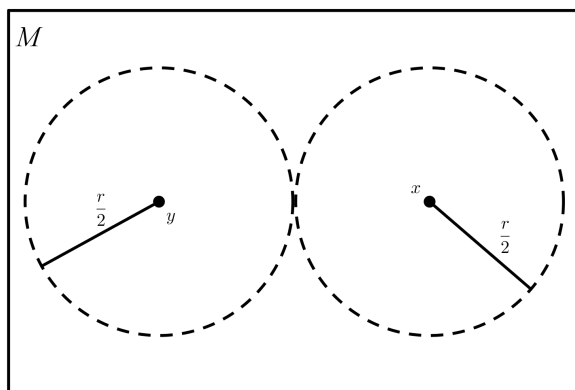


Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Propriedade 2.3. Sejam M um espaço métrico e $x \neq y$ dois pontos de M distintos entre si. Se $d(x, y) = r$, então

$$B\left(x; \frac{r}{2}\right) \cap B\left(y; \frac{r}{2}\right) = \emptyset.$$

Figura 3: Representação da Propriedade 2.3.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

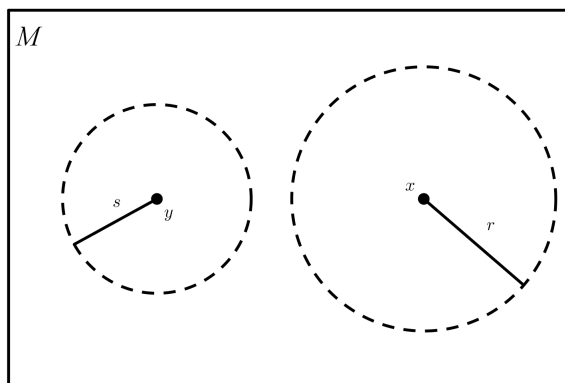
Demonstração. Suponhamos que exista $z \in B\left(x; \frac{r}{2}\right) \cap B\left(y; \frac{r}{2}\right)$. Então $x \in B\left(x; \frac{r}{2}\right)$ e $B\left(y; \frac{r}{2}\right)$, daí $d(x, z) < \frac{r}{2}$ e $d(y, z) < \frac{r}{2}$. Consequentemente, pela desigualdade triangular:

$$r = d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

assim teríamos $r < r$, o que é um absurdo. Portanto, $B\left(x; \frac{r}{2}\right) \cap B\left(y; \frac{r}{2}\right) = \emptyset$. $\square$

Propriedade 2.4. Dadas as bolas $B(x; r)$ e $B(y; s)$, se $r + s \leq d(x, y)$ então $B(x; r) \cap B(y; s) = \emptyset$.

Figura 4: Representação da Propriedade 2.4.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Demonstração. Vamos provar por contradição, suponhamos que há $z \in B(x; r) \cap B(y; s)$. Então teríamos $d(x, z) < r$ e $d(y, z) < s$. Daí

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) < r + s \leq d(x, y)$$

um absurdo. Portanto, $B(x; r) \cap B(y; s) = \emptyset$.

□

3 GEOMETRIA DIFERENCIAL

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos e teoremas de curvas regulares que são necessários para entender a métrica Funk. Mas primeiramente mostraremos algumas definições de curvas parametrizadas. Recomendamos ao leitor, uma leitura prévia de (CARMO, 2014).

Definição 3.1. (*Curva parametrizada*). Chamamos *curva parametrizada* a uma função contínua,

$$\begin{aligned}\gamma: I &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)),\end{aligned}$$

onde $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo, as funções reais $(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ são chamadas de funções coordenadas, e a variável t definida por parâmetro de γ . Chamamos γ de parametrização.

Observação 3.1. Uma curva γ é contínua num ponto $t_0 \in I$ se, e somente se, todas as funções coordenadas $(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ são contínuas em t_0 .

Definição 3.2. (*Traço de curva parametrizada*). Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$. A imagem $Im(\gamma) = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^n : t \in I\}$ é chamado de *traço* de γ .

Definição 3.3. (*Curva parametrizada fechada*). Uma curva parametrizada γ é fechada, se γ é definida num intervalo fechado $I = [a, b]$, em que $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Definição 3.4. (*Curva parametrizada simples*). Uma curva parametrizada γ é simples, se γ for injetiva em I , isto é, se $t_1 \neq t_2 \Rightarrow f(t_1) \neq f(t_2), \forall t_1, t_2 \in I$, excluindo se o intervalo I for fechado $[a, b]$, isto é, $f(a) = f(b)$. Quando não é simples, dizemos que γ tem auto-interseção.

Definição 3.5. (*Curva parametrizada diferenciável*). Uma curva parametrizada $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável, em $t \in I$ se, e somente se, as funções coordenadas $(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ são diferenciáveis em t .

Definição 3.6. (*Vetor tangente*). Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada diferenciável. O *vetor tangente* de γ em $t \in I$ é definido por

$$\begin{aligned}\gamma: I &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto (f'_1(t), f'_2(t), \dots, f'_n(t)).\end{aligned}$$

a *velocidade escalar* de γ em $t \in I$ é a norma do vetor tangente $\gamma'(t)$ e tem-se

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2 + \dots + (f_n'(t))^2}.$$

Definição 3.7. (*Vetor aceleração*). O vetor aceleração de γ em $t \in I$ é a primeira derivada do vetor tangente de γ e tem-se

$$\begin{aligned} \gamma'' : I &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto (f_1''(t), f_2''(t), \dots, f_n''(t)). \end{aligned}$$

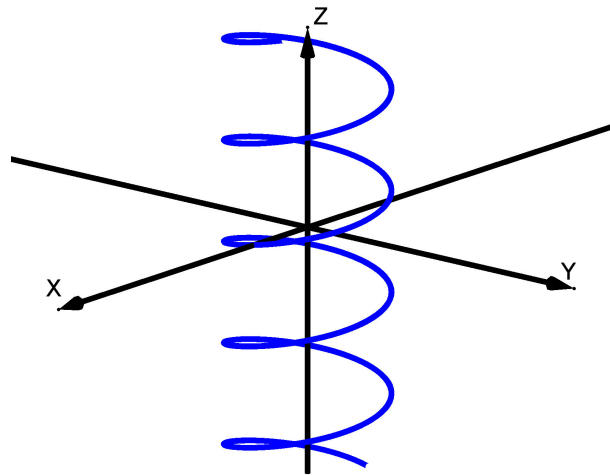
Veremos agora alguns exemplos de curvas parametrizadas diferenciáveis e exemplos onde as curvas não são diferenciáveis.

Exemplo 3.1. A curva diferenciável dada por

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (a \cos(t), a \sin(t), bt), \end{aligned}$$

com $a > 0$ e $b \neq 0$, é a hélice circular cujo traço está contido no cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = a^2\}$. O parâmetro t mede o ângulo que o eixo Ox faz com a reta que liga a origem O à projeção do ponto $\alpha(t)$ sobre o plano xOy . Seus pontos estão representados na Figura 5. À medida que o parâmetro t aumenta, o ponto $\gamma(t)$ da hélice faz um movimento de rotação em torno do eixo Oz .

Figura 5: Hélice circular.



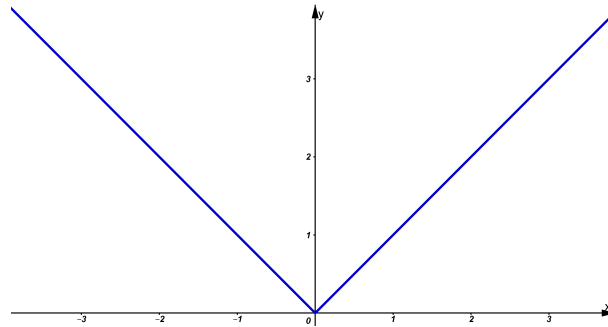
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Exemplo 3.2. A aplicação definida por

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t, |t|), \end{aligned}$$

é uma curva parametrizada simples mas não é diferenciável, pois a função coordenada $t \mapsto |t|$ não é diferenciável para $t = 0$, como mostra a Figura 6. Mas a curva parametrizada é diferenciável, se em qualquer intervalo I retirarmos $t = 0$.

Figura 6: Curva com vértice.



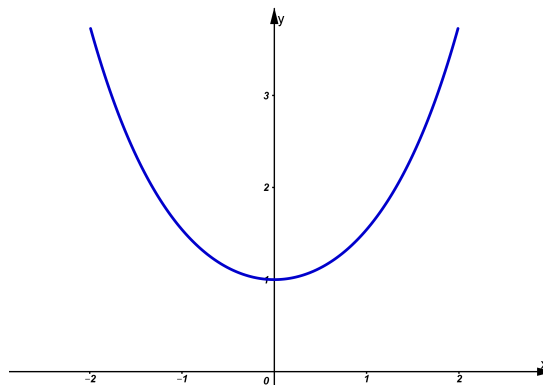
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Exemplo 3.3. A curva definida por

$$\begin{aligned} \gamma:]-2, 2[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t, \cosh(t)), \end{aligned}$$

é chamada de catenária e é uma curva parametrizada simples e diferenciável. Como mostra a Figura 7.

Figura 7: Catenária.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

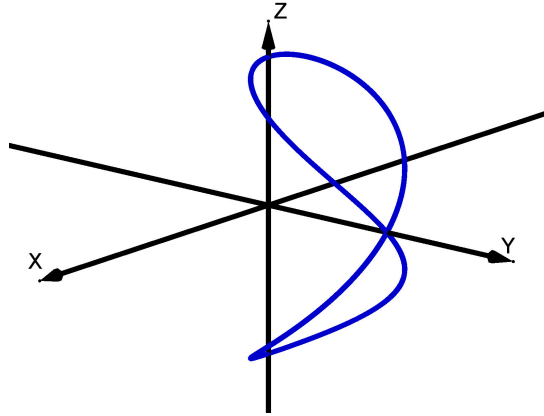
Exemplo 3.4. A curva de Viviani definida por

$$\begin{aligned} \gamma:]0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (\sin(t)\cos(t), \sin^2(t), \cos(t)), \end{aligned}$$

é encontrada através da interseção da esfera com equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, e do cilindro com equação $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2$. A curva parametrizada é diferenciável e não

simples, pois $f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{3\pi}{2}) = (0, 1, 0)$ é um ponto de auto-interseção, como temos na Figura 8.

Figura 8: Curva de Viviani.



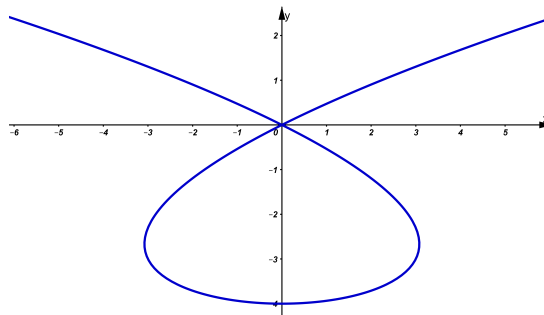
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Exemplo 3.5. A curva dada por

$$\begin{aligned}\gamma: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t^3 - 4t, t^2 - 4),\end{aligned}$$

é uma curva parametrizada diferenciável, mas não é fechada nem simples, pois $\gamma(-2) = \gamma(2) = (0, 0)$ é um ponto de auto-interseção, como mostra a Figura 9.

Figura 9: Curva com auto-inserção.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

3.1 Curvas Regulares

Pensa-se que uma curva parametrizada $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}$ possui uma reta tangente em $\gamma(t), \forall t \in I$. Já que a curva sendo diferenciável não é condição suficiente para garantir um vetor tangente não nulo, precisamos apresentar uma nova condição.

Definição 3.8. (Curva Regular). Uma curva parametrizada diferenciável $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é regular, se $\gamma'(t) \neq 0$, ou se $\|\gamma'(t)\| \neq 0, \forall t \in I$, onde as funções $f'_1(t), f'_2(t), \dots, f'_n(t)$ são contínuas, isto é, $\gamma(t)$ é de classe C^1 .

Definição 3.9. (Reta Tangente). Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada regular. A reta tangente a γ em $t_0 \in I$ é a reta que passa por $\gamma(t_0)$ na direção de $\gamma'(t_0)$, isto é,

$$r(\lambda) = \gamma(t_0) + \lambda\gamma'(t_0), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Vejamos agora alguns exemplos de curvas parametrizadas diferenciáveis.

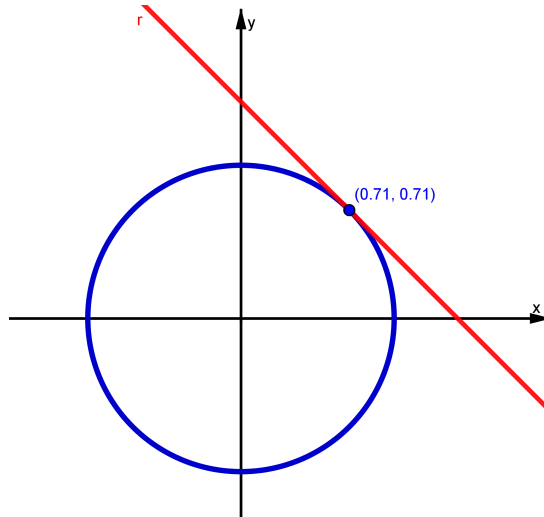
Exemplo 3.6. A circunferência unitária centrada na origem dada por

$$\begin{aligned} \gamma :]0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\cos(t), \sin(t)), \end{aligned}$$

onde t representa o ângulo que $\gamma(t)$ faz com o eixo Ox . Temos que $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t)) \neq (0, 0)$ e portanto γ é uma curva parametrizada diferenciável simples e regular $\forall t \in I$. Escolhendo uma reta tangente que passa no ponto $\gamma(\frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ na direção de $\gamma'(\frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, então temos

$$r(\lambda) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda \right), \lambda \in]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}[.$$

Figura 10: Curva circunferência.



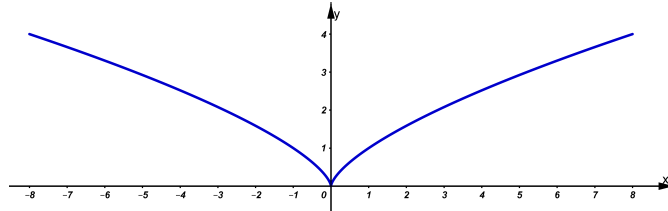
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Exemplo 3.7. A curva com cúspide definida por

$$\begin{aligned} \gamma :]-2, 2[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t^3, t^2) \end{aligned}$$

é uma curva parametrizada diferenciável e simples, como mostra a Figura 11. Precisamos verificar se ela é regular. Obtemos o vetor tangente e a velocidade escalar de γ por $\gamma'(t) = (3t^2, 2t)$ e $\|\gamma'(t)\| = |t|\sqrt{9t^2 + 4}$, desse modo, quando $t = 0$ temos que $\gamma'(0) = (0, 0)$ e $\|\gamma'(0)\| = 0$. Logo, esta curva não é regular para todo $t \in I$.

Figura 11: Curva com cúspide.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

3.1.1 Reparametrização

Uma curva pode ser representada por diferentes parametrizações.

Definição 3.10. (*Reparametrização*). Sejam I e J intervalos de $\mathbb{R}^n$, $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva regular e $\alpha : J \rightarrow I$ um difeomorfismo de classe C^1 , isto é, γ e γ^{-1} são diferenciáveis. Então, a função composta

$$\begin{aligned} \Gamma'' : J &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto (\gamma \circ \alpha)(t) = \gamma(\alpha(t)) \end{aligned}$$

é uma curva regular com o mesmo traço de γ , e chamamos de *reparametrização* de γ por α . A função α é denominada como mudança de parâmetro. Também podemos dizer que as duas curvas regulares γ e Γ são equivalentes.

Exemplo 3.8. Sejam as parametrizações $\gamma_1 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_2 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\gamma_1 : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por

$$\gamma_1(t) = (\cos(t), \sin(t)), \gamma_2(t) = (\cos(2t), \sin(2t)), \gamma_3(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

É possível ver que as três curvas mencionadas acima mostram o mesmo traço, sendo a circunferência unitária mostrada na Figura 10. Reparametrizando a curva $\gamma_1(t)$ por $\alpha(t) = 2t$, temos

$$\Gamma(t) = \gamma_1(\alpha(t)) = \gamma_1(2t) = (\cos(2t), \sin(2t)) = \gamma_2(t), t \in [0, \pi].$$

Como a função α é um difeomorfismo, as curvas γ_1 e γ_2 são equivalentes, dado que $\alpha'(t) = 2 \neq 0$. Também podemos ver que todas as três parametrizações são fechadas, entretanto somente γ_1 e γ_2 são simples e γ_3 não é simples pois ela percorre o traço da curva duas vezes.

3.1.2 Comprimento de arco

Definição 3.11. (*Comprimento de arco*). Seja $L : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o comprimento de arco de uma curva regular $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 definido como a integral da velocidade escalar de γ com $[a, b] = I$, tem-se que

$$L = \int_a^b \|\gamma'(\sigma)\| d\sigma.$$

Definição 3.12. (*Função comprimento de arco*). Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada regular de classe C^1 . A função de comprimento de arco de γ é a distância percorrida a partir de t_0 até t , onde $t, t_0 \in I$. Assim, a função $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(\sigma)\| d\sigma.$$

Definição 3.13. (*Curva parametrizada pelo comprimento de arco*). Uma curva regular γ é parametrizada pelo comprimento de arco se para todo $t \in I$ temos $\|\gamma'\| = 1$, isto é, para cada $t_0, t_1 \in I, t_0 < t_1$, o comprimento de arco de γ desde t_0 até t_1 é dado por

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(\sigma)\| d\sigma = t_1 - t_0.$$

Lema 3.1. Se $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$ são diferenciáveis e satisfazem $\langle f(t), g(t) \rangle = c$, para todo $t \in]a, b[$, então $\langle f'(t), g(t) \rangle = -\langle f(t), g'(t) \rangle$. Ainda mais, $\|f(t)\| = c$ se, e somente se, $\langle f'(t), f(t) \rangle = 0$, qualquer que seja $t \in]a, b[$.

Demonstração. A derivada de uma função é nula em $]a, b[$ se, e somente se, a função é constante. Agora, derivando a igualdade $\langle f(t), g(t) \rangle = c$, então obtemos

$$\langle f(t), g(t) \rangle' = c' \Leftrightarrow \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle f'(t), g(t) \rangle = -\langle f(t), g'(t) \rangle.$$

Em particular, $\|f(t)\|^2 = \langle f(t), f(t) \rangle = c$ se, e somente se, $\langle f'(t), f(t) \rangle = 0$, para todo $t \in]a, b[$. □

3.1.3 Reparametrização pelo comprimento de arco

Definição 3.14. Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva regular, $s : I \rightarrow J$ a função de comprimento de arco e $J, I \subset \mathbb{R}$ os intervalos. Como a função $s(t)$ é bijetiva de classe C^1 , então existe a função inversa $s^{-1} = \alpha : J \rightarrow I$ de $s(t)$. A reparametrização de γ por α é dado por

$$\begin{aligned} \Gamma' : J &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ s &\longmapsto (\gamma \circ \alpha)(s). \end{aligned}$$

Por outro lado, se γ for uma reparametrização de Γ por $\alpha^{-1} = s(t)$, o traço de γ continua sendo o mesmo, já que α é bijetiva.

Teorema 3.1. *Se $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma curva regular, então γ pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco.*

Demonstração. Considerando γ uma curva regular e $s(t) : I \rightarrow J$ uma função de comprimento de arco de γ a partir de t_0 definida por $s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(\sigma)\| d\sigma$ com $J = s(I)$. Pelo teorema fundamental de cálculo, a função $s(t)$ satisfaz

$$s'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0.$$

Com isso, $s(t)$ é uma função injetiva, diferenciável e estritamente crescente. Consequentemente, $t \mapsto s(t) = s$ tem função inversa $s \mapsto t(s) = t$, chamando $t(s)$ por $\alpha(s)$. Teorema da derivada da função inversa implica

$$\alpha'(s) = \alpha'(s(t)) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{s'(\alpha(s))} = \frac{1}{\|\gamma'(\alpha(s))\|}.$$

Portanto, $\Gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma reparametrização de γ pelo comprimento de arco, isto é, $\Gamma(s) = \gamma(\alpha(s))$. Pela regra da cadeia, $\Gamma'(s) = \gamma'(\alpha(s))\alpha'(s)$, onde

$$\begin{aligned} \|\Gamma'(s)\| &= \|\gamma(\alpha(s))\alpha'(s)\| \\ &= \|\gamma(\alpha(s))\frac{1}{s'(\alpha(s))}\| = \frac{1}{s'(\alpha(s))}\|\gamma'(\alpha(s))\| \\ &= \frac{1}{\|\gamma'(\alpha(s))\|}\|\gamma(\alpha(s))\| = 1. \end{aligned}$$

Com isso, Γ está parametrizada pelo comprimento de arco. □

Vale lembrar que a reparametrização de uma curva não é única, pois dependendo da escolha do ponto inicial t_0 no comprimento de arco e da sua orientação.

Exemplo 3.9. A catenária mostrada na Figura 7 definida por $\gamma(t) = (t, \cosh(t))$ é regular para $\forall t \in [-2, 2]$, pois $\gamma'(t) = (1, \sinh(t)) \neq (0, 0)$. Além disso, temos

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + \sinh^2(\sigma)} d\sigma = \sinh(t).$$

Com isso, reparametrizando γ por $\alpha(s) = \operatorname{arcsenh}(s)$ é dada por

$$\begin{aligned} \Gamma' = (\gamma \circ \alpha) : \quad & [\sinh(-2), \sinh(2)] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s \quad & \longmapsto (\operatorname{arcsenh}(s), \cosh(\operatorname{arcsenh}(s))). \end{aligned}$$

3.2 Superfícies Regulares

Definição 3.15. (*Superfície parametrizada diferenciável*). Uma *superfície parametrizada diferenciável* é uma aplicação

$$\begin{aligned} S : U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

diferenciável, sendo U um subconjunto aberto e conexo do $\mathbb{R}^2$. Ainda mais, quando dS_P é injetora para qualquer ponto $P = (u, v) \in U$, dizemos que S é regular.

Como $S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, temos $x, y, z : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ como funções coordenadas de S . Dado

$$\begin{aligned} S_u : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P &\longmapsto \left(\frac{\partial x}{\partial u}(P), \frac{\partial y}{\partial u}(P), \frac{\partial z}{\partial u}(P) \right). \end{aligned}$$

Denotaremos $S_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)$. Do mesmo modo, $S_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$.

3.2.1 Superfície de Revolução

Quando uma curva plana faz uma rotação em torno de um eixo gera uma superfície que definimos da seguinte forma:

Definição 3.16. (*Superfície de Revolução*). Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada por $\gamma(u) = (f(u), 0, g(u))$, $u \in I$. Uma superfície gerada pela rotação de uma curva γ em torno do eixo Oz é chamada uma superfície de revolução. Então, $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é parametrizada por

$$S(u, v) = (f(u)\cos(v), f(u)\sin(v), g(u)), u \in I, 0 < v < 2\pi.$$

Mesmo que Oz foi escolhido para o eixo de rotação, os outros também podem ser escolhidos. A seguir, temos alguns exemplos de superfícies regulares.

Exemplo 3.10. A esfera centrada na origem com raio $R > 0$, definida pela equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

é uma superfície de revolução gerada pela rotação da semi-circunferência $\gamma(u) = (R \cdot \cos(u), R \cdot \sin(u))$, $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ em torno do eixo Oz , como mostra a Figura 12. Assim

$$S : \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\times]0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \longmapsto (R\cos(u)\cos(v), R\cos(u)\sin(v), R\sin(u)).$$

Podemos ver que é regular, pois os vetores tangentes

$$S_u(u, v) = (-R\sin(u)\cos(v), -R\sin(u)\sin(v), R\cos(u)),$$

$$S_v(u, v) = (-R\cos(u)\sin(v), R\cos(u)\cos(v), 0),$$

são linearmente independentes para todo $(u, v) \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\times]0, 2\pi[$:

$$S_u(u, v) \times S_v(u, v) = R^2(-\cos^2(u)\cos(v), \cos^2(u)\sin(v), -\cos(u)\sin(u)) \neq (0, 0, 0).$$

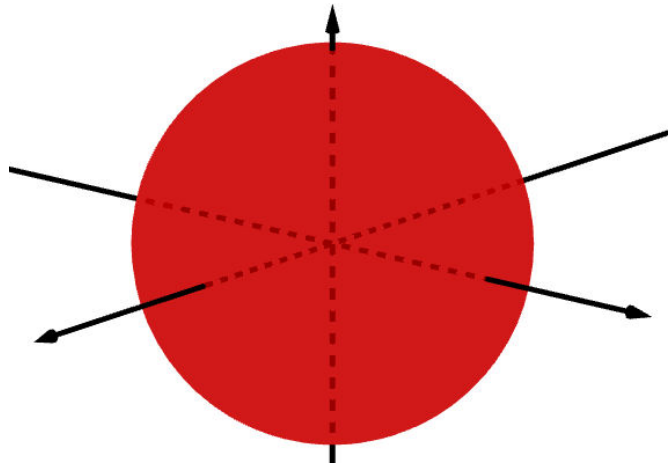
Vale lembrar que os pólos $(0, 0, R)$ e $(0, 0, -R)$ não pertencem ao subconjunto aberto, pois com estes pontos a parametrização não seria regular, assim

$$\|S_u(u, v) \times S_v(u, v)\|^2 = R^4(\cos^4(u) + \sin^2(u)\cos^2(u)) = R^4\cos^2(u),$$

pelo quadrado da norma do produto vetorial é zero, se

$$\|S_u(u, v) \times S_v(u, v)\|^2 = R^4\cos^2(u) = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Figura 12: Esfera.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Exemplo 3.11. O cone duplo definido por

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

é uma superfície de revolução gerada pela rotação da reta $\gamma(u) = (u, 0, u)$, $u \in]-1, 1[$ em torno do eixo Oz , como se pode ver na Figura 13. Daí

$$S :]-1, 1[\times]0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \longmapsto (u \cos(v), u \sin(v), u).$$

Verificamos que não é regular para todo $(u, v) \in U$, pois

$$\begin{aligned} S_u(u, v) &= (\cos(v), \sin(v), 1) \\ S_v(u, v) &= (-u \sin(v), u \cos(v), 0), \\ S_u(u, v) \times S_v(u, v) &= (-u \cos(v), -u \sin(v), u), \end{aligned}$$

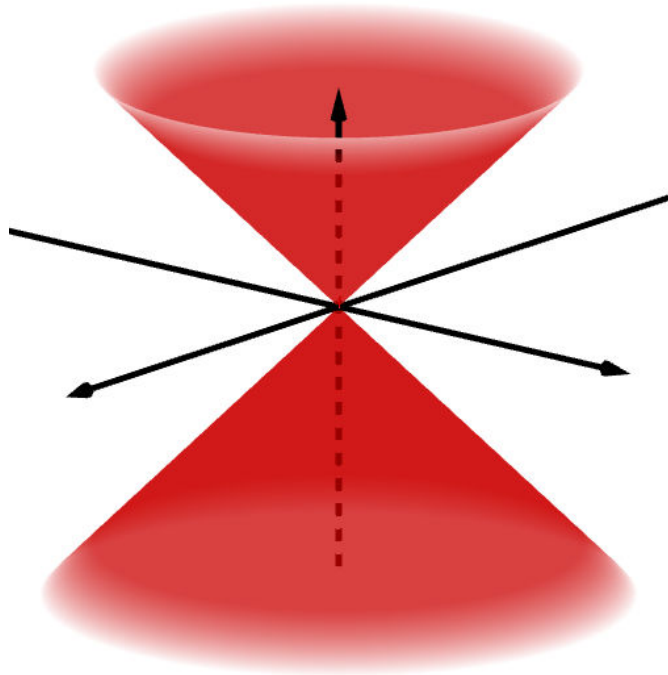
portanto, no vértice do cone obtemos $S_u(0, 0) \times S_v(0, 0) = (0, 0, 0)$. Assim

$$\|S_u(u, v) \times S_v(u, v)\|^2 = 2u^2,$$

e pelo quadrado da norma do produto vetorial é zero, se

$$\|S_u(u, v) \times S_v(u, v)\|^2 = 2u^2 = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

Figura 13: Cone duplo.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Exemplo 3.12. O hiperbolóide de uma folha, definido pela equação

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - \frac{z^2}{c} = 1$$

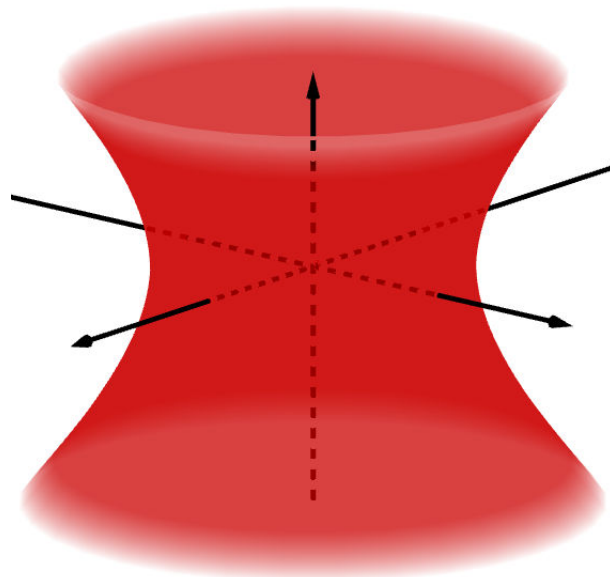
é uma superfície de revolução encontrada através da rotação da hipérbole $\gamma(u) = (\cosh(u), 0, \sinh(u))$, $u \in]-1, 1[$ em torno do eixo Oz , como é representado na Figura 14. Temos

$$\begin{aligned} S :]-1, 1[\times]0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (\cosh(u)\cos(v), \cosh(u)\sin(v), \sinh(u)). \end{aligned}$$

Logo temos que é regular para todo $(u, v) \in U$, daí

$$\begin{aligned} S_u(u, v) &= (-\sinh(u)\cos(v), -\sinh(u)\sin(v), \cosh(u)) \\ S_v(u, v) &= (-\cosh(u)\sin(v), \cosh(u)\cos(v), 0), \\ S_u(u, v) \times S_v(u, v) &= (-\cosh^2(u)\cos(v), \cosh^2(u)\sin(v), -\cosh(u)\sinh(u)) \neq (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Figura 14: Hiperbolóide de uma folha.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

3.2.2 Plano Tangente

Definição 3.17. (Vetor Tangente). Seja $S : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Dizemos que $w \in \mathbb{R}^3$ é um *vetor tangente* a S em $(u_0, v_0) \in U$, se existe uma curva parametrizada regular da superfície $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que para algum $t_0 \in I$ temos $\gamma(t_0) = S(u_0, v_0)$ e $\gamma'(t_0) = w$.

Definição 3.18. (Plano Tangente). Seja $S : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. O conjunto de todos os vetores tangentes a S em (u_0, v_0) é o *plano tangente*, denotado por $T_p S$, onde $p = (u_0, v_0) \in U$.

Proposição 3.1. *Seja $S(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e $q = (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$. Então, $T_p S$ é o conjunto de vetores obtidos como combinação linear de $S_u(u_0, v_0)$ e $S_v(u_0, v_0)$.*

Demonstração. Se $w \in T_p S$, então $w = \gamma'(t_0)$, onde $\gamma(t) = S(u(t), v(t))$ e $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$. Portanto,

$$\begin{aligned} w &= \gamma'(t_0) = \frac{d}{dt}(S(u(t), v(t))) \\ &= S_u(u_0, v_0)u'(t_0) + S_v(u_0, v_0)v'(t_0), \end{aligned}$$

isto é, w é uma combinação linear dos vetores S_u e S_v em (u_0, v_0) . Do mesmo modo, consideramos

$$w = aS_u(u_0, v_0) + bS_v(u_0, v_0),$$

então existe uma curva $\gamma(t)$ da superfície tal que $(u'(0), v'(0)) = (u_0, v_0)$ e $\gamma'(0) = w$. Com isso

$$\gamma(t) = S(u(t), v(t)),$$

onde $u(t) = u_0 + at$ e $v(t) = v_0 + bt$. □

Definição 3.19. *Seja $S : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular e $p = (u, v) \in U$. Então $N : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por*

$$N(p) = \frac{S_u(p) \times S_v(p)}{\|S_u(p) \times S_v(p)\|}$$

é chamado de *vetor normal unitário* a S em p .

3.3 Geodésica

Definimos geodésica como sendo a curva com o comprimento mínimo em relação a qualquer outra curva que passa em dois pontos fixos de uma superfície. As geodésicas são as curvas mais importantes da superfície.

Definição 3.20. (*Geodésica*). *Seja $S(u, v)$ uma superfície parametrizada regular. Uma curva regular $\gamma(t) = S(u(t), v(t))$ é uma *geodésica* da superfície se, para $t \in I$, $\gamma''(t)$ é zero ou é perpendicular à superfície no ponto $\gamma(t)$, ou seja, paralelo ao vetor normal unitário N da superfície ao longo da curva γ .*

Observação 3.2. Se γ é uma geodésica, então $\|\gamma'(t)\|$ é constante. De fato, como $\gamma''(t)$ é normal a S em $(u(t), v(t))$, em particular $\langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle = 0$. Concluímos que

$$\frac{d}{dt} \|\gamma'(t)\|^2 = 2\langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle = 0.$$

4 MÉTRICA FUNK

Neste capítulo, iremos apresentar a métrica Funk e suas propriedades, também mostraremos a métrica Funk inversa e a geometria das bolas da métrica Funk. Recomendamos ao leitor, uma leitura prévia de (BUSEMANN, 1955), (FUNK, 1929) e (PAPADOPOULOS; TROYANOV, 2014). Chamamos Ω de um domínio convexo adequado em $\mathbb{R}^n$, isto é, Ω é convexo, aberto, não-vazio e $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. Denotamos por $\bar{\Omega}$ o fecho em $\mathbb{R}^n$ e por $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$ o bordo topológico de Ω .

Se estivermos lidando com um domínio ilimitado será conveniente adicionar pontos no infinito ao bordo $\partial\Omega$. Para fazer isso, consideramos $\mathbb{R}^n$ um espaço afim no espaço projetivo $\mathbb{RP}^n$, que é praticamente um conjunto de linhas em $\mathbb{R}^{n+1}$ passando pela origem. Denotamos por $H_\infty = \mathbb{RP}^n \setminus \mathbb{R}^n$ o hiperplano no infinito. Em seguida, definimos o fecho de Ω em $\mathbb{RP}^n$ por $\tilde{\Omega}$ e por $\tilde{\partial}\Omega = \tilde{\Omega} \setminus \Omega$. Observe que $\partial\Omega = \tilde{\partial}\Omega \setminus H_\infty$.

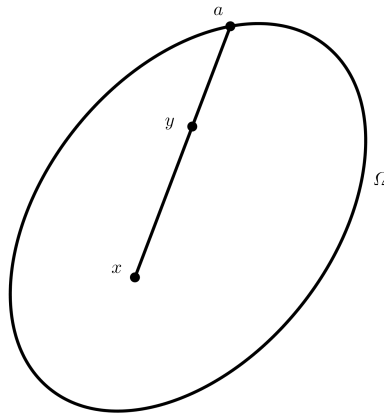
Para quaisquer dois pontos $x \neq y$ em $\mathbb{R}^n$, definimos por $[x, y]$ o segmento fechado unindo os dois pontos. Também denotamos $R(x, y)$ como o raio começando em x e passando por y e o seu fecho em $\mathbb{RP}^n$ denotamos por $\tilde{R}(x, y)$. Finalmente definimos

$$a_\Omega(x, y) = \tilde{R}(x, y) \cap \tilde{\partial}\Omega \in \mathbb{RP}^n.$$

Agora definimos a métrica Funk.

4.1 Métrica Funk

Figura 15: Métrica Funk.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Definição 4.1. (*Métrica Funk*). A métrica Funk em Ω , denotada por F_Ω , é definida por $x, y \in \Omega$ e por

$$F_{\Omega}(x, y) = \log \left(\frac{|x - a|}{|y - a|} \right)$$

com $x \neq y$, onde $a = a_{\Omega}(x, y) \in \mathbb{RP}^n$ é a interseção de $\partial\Omega$ com a semirreta por x que passa em y .

Agora vamos ver algumas das suas propriedades:

Proposição 4.1. *A métrica Funk em um domínio convexo $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ satisfaz as seguintes propriedades:*

- (a) $F_{\Omega}(x, y) \geq 0$ e $F_{\Omega}(x, x) = 0, \forall x, y \in \Omega$.
- (b) $F_{\Omega}(x, z) \leq F_{\Omega}(x, y) + F_{\Omega}(y, z), \forall x, y, z \in \Omega$.
- (c) F_{Ω} é projetiva, isto é, $F_{\Omega}(x, z) = F_{\Omega}(x, y) + F_{\Omega}(y, z)$ quando z é um ponto no segmento $[x, y]$.
- (d) A métrica fraca F_{Ω} é assimétrica, isto é, $F_{\Omega}(x, y) \neq F_{\Omega}(y, x)$ em geral.
- (e) $x \neq y \Rightarrow F_{\Omega}(x, y) > 0$, se e somente se, o domínio Ω é limitado.
- (f) A métrica fraca F_{Ω} é ilimitada.

Demonstração. O item (a) é provado pelo fato que $y \in [x, a_{\Omega}(x, y)]$, portanto $\frac{|x - a|}{|y - a|} \geq 1$, temos a igualdade quando $x = y$ isto é, $\frac{|x - a|}{|y - a|} = 1$ e assim temos $F_{\Omega}(x, y) = \log(1) = 0$. Para provarmos o item (b) precisamos assumir que y não está na reta que passa por x e z . Seja

$$\theta := \angle xpb, \quad \phi := \angle xbc, \quad \psi := \angle pcb.$$

Pela lei dos senos, temos as seguintes identidades:

$$\frac{|x - b|}{\sin \theta} = \frac{|x - p|}{\sin \phi}, \quad \frac{|z - c|}{\sin \theta} = \frac{|z - p|}{\sin \psi}, \quad \frac{|y - c|}{\sin \phi} = \frac{|y - b|}{\sin \psi}$$

Obtendo assim

$$\begin{aligned} \frac{\frac{|x - p|}{\sin \phi}}{\frac{|z - p|}{\sin \psi}} &= \frac{\frac{|x - b|}{\sin \theta}}{\frac{|z - c|}{\sin \theta}} \\ \frac{|x - p|}{|z - p|} &= \frac{|x - b| \cdot \sin \phi}{|z - c| \cdot \sin \psi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{|x-p|}{|z-p|} &= \frac{|x-b| \cdot \sin \phi}{|z-c| \cdot \sin \psi} \\
&= \frac{|x-b|}{|z-c|} \cdot \frac{|y-c|}{|y-b|} \\
&= \frac{|x-b|}{|y-b|} \cdot \frac{|y-c|}{|z-c|}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\frac{|x-a|}{|z-a|} \leq \frac{|x-p| + |p-a|}{|z-p| + |p-a|} < \frac{|x-p|}{|z-p|}.$$

Combinando os dois, temos

$$\frac{|x-a|}{|z-a|} < \frac{|x-b|}{|y-b|} \cdot \frac{|y-c|}{|z-c|}.$$

Assim, obtemos

$$\log \left(\frac{|x-a|}{|z-a|} \right) < \log \left(\frac{|x-b|}{|y-b|} \cdot \frac{|y-c|}{|z-c|} \right) = \log \left(\frac{|x-b|}{|y-b|} \right) + \log \left(\frac{|y-c|}{|z-c|} \right).$$

Portanto

$$F_{\Omega}(x, z) < F_{\Omega}(x, y) + F_{\Omega}(y, z).$$

No item (c) podemos ver que se $y \in [x, z]$ e $x \neq y \neq z$, então $a_{\Omega}(x, y) = a_{\Omega}(x, z) = a_{\Omega}(y, z)$. Chamando esse ponto em comum de a , temos

$$\begin{aligned}
F_{\Omega}(x, y) + F_{\Omega}(y, z) &= \log \left(\frac{|x-a|}{|y-a|} \right) + \log \left(\frac{|y-a|}{|z-a|} \right) \\
&= \log \left(\frac{|x-a|}{|y-a|} \cdot \frac{|y-a|}{|z-a|} \right) \\
&= \log \frac{|x-a|}{|z-a|} = F_{\Omega}(x, z).
\end{aligned}$$

O item (d) é fácil de verificar, de fato

$$\log \frac{|x-a|}{|y-a|} \neq \log \frac{|y-a|}{|x-a|}.$$

A demonstração do item (e) segue imediatamente da definição e o fato que o domínio convexo Ω em $\mathbb{R}^n$ é ilimitado se e somente se contém um raio.

Para provar o item (f) precisamos lembrar que assumimos $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, e portanto $\partial\Omega \neq \emptyset$.

Seja $x \in \Omega$ e $a \in \partial\Omega$ e considerar o segmento aberto (x, a) contido em Ω . Para qualquer sequência x_n nesse segmento convergindo para a (em relação a métrica euclidiana),

nós temos $F_{\Omega}(x, x_n) = \log \frac{|x-a|}{|x_n-a|} \rightarrow \infty$ conforme $n \rightarrow \infty$. $\square$

Proposição 4.2. *Seja x e y dois pontos em um domínio convexo Ω e $a = a_\Omega(x, y)$. Seja $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ser uma forma linear arbitrária tal que $h(x) \neq h(y)$. Então*

$$F_\Omega(x, y) = \log \left(\frac{h(a) - h(x)}{h(a) - h(y)} \right).$$

Demonstração. A demonstração desta proposição pode ser vista em (PAPADOPOULOS; TROYANOV, 2014). $\square$

Definição 4.2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio convexo adequado e $a \in \partial\Omega$ é um ponto limite (finito). Nós assumimos que Ω contém a origem 0. Um *suporte funcional* em a por Ω é uma função linear $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(a) = 1$ e $h(x) < 1$ por qualquer ponto x em Ω . O hiperplano $H = \{z | h(z) = 1\}$ é chamado de hiperplano de suporte em a por Ω . Se Ω é ilimitado, então o hiperplano no infinito H_∞ é também considerado ser um hiperplano de suporte.

Qualquer ponto limite de um domínio convexo admite um ou vários suportes funcionais. Vejamos agora um consequência desta proposição.

Corolário 4.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio convexo contendo a origem e seja h um suporte funcional para Ω . Nós temos então*

$$F_\Omega(x, y) \leq \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} \right)$$

para qualquer $x, y \in \Omega$. E nós temos igualdade se, e somente se, $a = a_\Omega(x, y) \in H_\infty$ e $h(x) = h(y)$, ou $a \notin H_\infty$ e $h(a) = 1$.

Demonstração. Se $h(x) = h(y)$, então não há nada o que provar. Agora, vamos considerar $h(x) \neq h(y)$. Primeiramente nós assumimos que $a = a_\Omega(x, y) \notin H_\infty$. A suposição de $h(x) \neq h(y)$ implica que $h(a) \neq h(y)$. Como a função $a \mapsto \log \frac{|x-a|}{|y-a|}$ é estritamente monótona decrescente e $h(a) \leq 1$, nós temos pela proposição 4.2:

$$F_\Omega(x, y) = \log \left(\frac{h(a) - h(x)}{h(a) - h(y)} \right) \geq \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} \right).$$

A igualdade é válida se, e somente se, $h(a) = 1$. Suponha agora que $a \in H_\infty$, isto significa que $F_\Omega(x, y) = 0$ e o raio $R(x, y)$ está contido em Ω . Em particular, temos

$$h(x) + \lambda h(y - x) = h(x + \lambda(y - x)) < 1, \forall \lambda \geq 0,$$

implicando em $h(y) - h(x) = h(y - x) \leq 0$. Como assumimos que $h(x) \neq h(y)$, nós temos $h(y) < h(x)$ e portanto

$$F_{\Omega}(x, y) = 0 > \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} \right)$$

□

É possível observar que a distância Funk entre dois pontos em Ω é uma operação unidimensional. Mais precisamente, se $S = [a_1, a_2] \subset \mathbb{R}$ é um segmento compacto em $\mathbb{R}^n$ contendo um ponto x e y no seu interior com $y \in [a_1, a_2]$, devemos escrever

$$F_S(x, y) = \log \frac{|x - a_2|}{|y - a_2|}$$

Apesar de S não ser um conjunto aberto, $F_S(x, y)$ corresponde claramente à métrica Funk unidimensional no interior relativo de S .

Proposição 4.3. *A distância Funk entre dois pontos de x e y em Ω é dado por*

$$F_{\Omega}(x, y) = \inf \{ F_S(x, y) \mid S \text{ é um segmento em } \Omega \text{ contendo } x \text{ e } y \}.$$

Demonstração. Nós identificamos S com um segmento em $\mathbb{R}$ com $b < x \leq y < a$ e observe que a função $a \mapsto \log \frac{|x-a|}{|y-a|}$ é estritamente monótona decrescente. □

Exemplo 4.1. (Bola Euclidiana) A seguinte fórmula é a métrica Funk na bola unitária euclidiana $B \subset \mathbb{R}^n$:

$$F_B(x, y) = \log \left(\frac{\sqrt{|y-x|^2 - |x \wedge y|^2} + |x|^2 - \langle x, y \rangle}{\sqrt{|y-x|^2 - |x \wedge y|^2} - |y|^2 + \langle x, y \rangle} \right), \quad (4.1)$$

onde $|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$ é a área do paralelogramo com lados $\vec{0x}, \vec{0y}$.

De fato, se $x = y$ não há o que provar, então assumimos que $x \neq y$. Vamos definir $a = a_B(x, y) = R(x, y) \cap \partial B$. Usando a Proposição 4.2 com a forma linear $h(z) = \langle y - z, z \rangle$ nós temos

$$F_B(x, y) = \log \left(\frac{\langle y - x, a \rangle - \langle y - x, x \rangle}{\langle y - x, a \rangle - \langle y - x, y \rangle} \right) = \log \left(\frac{\langle y - x, a \rangle + |x|^2 - \langle x, y \rangle}{\langle y - x, a \rangle - |y|^2 + \langle x, y \rangle} \right).$$

Agora vamos calcular $\langle y - x, a \rangle$. Vamos definir $u = \frac{y - x}{|y - x|}$ e

$$a_1 = \langle u, a \rangle u, a_2 = a - a_1.$$

Então $a_1 + a_2$ e a_1 é um múltiplo de $y - x$ onde a_2 é a projeção ortogonal da origem O de $\mathbb{R}^n$ na linha que passa por x e y . Em particular, a altura do triângulo Oxy é igual a $|a_2|$, portanto

$$A(Oxy) = \frac{1}{2}|x \wedge y| = \frac{1}{2}|a_2| \cdot |y - x|.$$

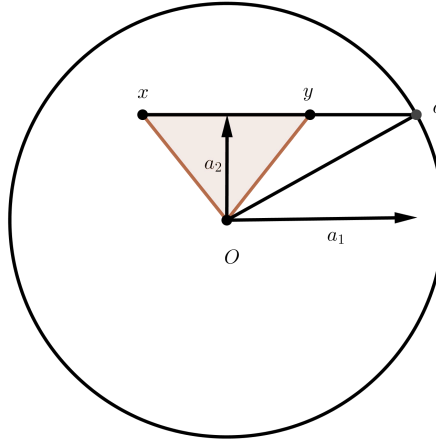
É possível ver que $\langle u, a \rangle > 0$ e $|a|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$, assim temos

$$\begin{aligned} \langle y - x, a \rangle^2 &= |y - x|^2 \cdot \langle u, a \rangle^2 \\ &= |y - x|^2 \cdot |a_1|^2 \\ &= |y - x|^2 \cdot (1 - a_2^2) \\ &= |y - x|^2 - |x \wedge y|^2 \end{aligned}$$

E assim temos a seguinte fórmula

$$|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$$

Figura 16: Exemplo da métrica Funk na bola unitária euclidiana.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

4.2 Métrica Funk Inversa

Definição 4.3. (*Métrica Funk Inversa*) A métrica Funk inversa em um domínio convexo Ω é definido por

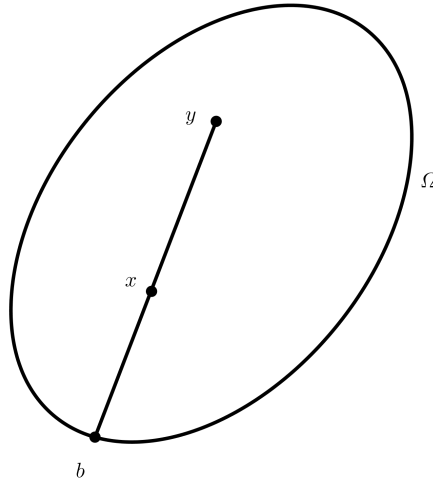
$${}^rF_{\Omega}(x, y) = F_{\Omega}(y, x) = \log \left(\frac{|y - b|}{|x - b|} \right),$$

onde $b = a_{\Omega}(y, x)$.

Esta métrica satisfaz as seguintes propriedades:

Proposição 4.4. A métrica Funk inversa em um domínio $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ é uma métrica fraca projetiva. É ilimitada e assimétrica e $y \neq x \Rightarrow F_{\Omega}(y, x) > 0$, se e somente se, o domínio Ω é limitado.

Figura 17: Métrica Funk Inversa.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Demonstração. A prova é uma consequência da proposição 4.1. □

Uma diferença importante entre a métrica Funk e a métrica Funk inversa é a seguinte:

Proposição 4.5. *Seja Ω um domínio convexo limitado em $\mathbb{R}^n$ e x um ponto em Ω . Então a função $y \rightarrow F_{\Omega}(y, x)$ é limitada.*

Demonstração. Definimos λ_x e δ por

$$\lambda_x = \inf_{b \in \partial\Omega} |x - b|, \text{ e } \delta = \sup_{a, b \in \partial\Omega} |a - b|.$$

Observe que δ é o diâmetro euclidiano de Ω , então $\delta < \infty$ já que Ω é limitado. Nós também temos que $\lambda_x > 0$. A proposição segue da desigualdade

$$F_{\Omega}(y, x) \leq \log \left(\frac{\delta}{\lambda_x} \right)$$

□

4.3 Geometria das Bolas

Como estamos lidando com distâncias assimétricas, nós precisamos diferenciar a *bola para frente* e a *bola para trás*.

Definição 4.4. Para um ponto x em Ω e $\rho > 0$, definimos

$$B^+(x, \rho) = \{y \in B \mid F_\Omega(x, y) < \rho\}$$

e chamamos de *bola aberta para frente* (ou *bola aberta à direita* centrada em x de raio ρ). Do mesmo modo, definimos

$$B^-(x, \rho) = \{y \in B \mid F_\Omega(y, x) < \rho\}$$

e chamamos de *bola aberta para trás* (ou *bola aberta à esquerda* centrada em x de raio ρ).

Definição 4.5. Para um ponto x em Ω e $\rho > 0$, definimos

$$B^+[x, \rho] = \{y \in B \mid F_\Omega(x, y) \leq \rho\}$$

como a *bola fechada para frente* (ou *bola fechada à direita* centrada em x de raio ρ). Reciprocamente, definimos

$$B^-[x, \rho] = \{y \in B \mid F_\Omega(y, x) \leq \rho\}$$

como a *bola fechada para trás* (ou *bola fechada à esquerda* centrada em x de raio ρ).

Definição 4.6. Para um ponto x em Ω e $\rho > 0$, definimos

$$S^+(x, \rho) = \{y \in B \mid F_\Omega(x, y) = \rho\}$$

e denominamos de *esfera para frente* (ou *esfera à direita* centrada em x de raio ρ). Do mesmo modo, definimos

$$S^-(x, \rho) = \{y \in B \mid F_\Omega(y, x) = \rho\}$$

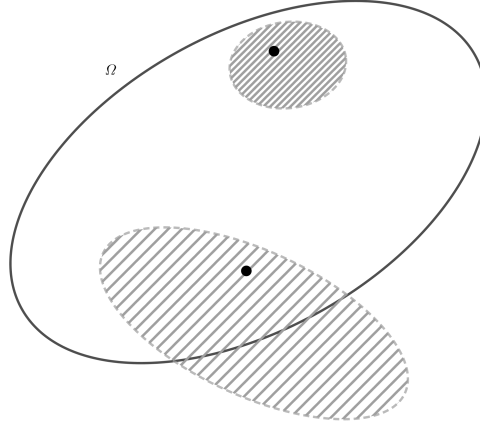
e denominamos de *esfera para trás* (ou *esfera à esquerda* centrada em x de raio ρ).

Note que a *bola para trás* da métrica Funk é a *bola para frente* da métrica Funk inversa e vice-versa. Porém, a bola para frente e a bola para trás geralmente tem diferentes formas e diferentes propriedades.

Proposição 4.6. Seja Ω um subconjunto aberto convexo de $\mathbb{R}^n$ com a sua métrica F_Ω , seja x um ponto em Ω e seja ρ um número real não-negativo. Nós temos:

- A bola aberta para frente $B^+(x, \rho)$ é a imagem de Ω pela homotetia de centro x e o fator $(1 - e^{-\rho})$.
- A bola aberta para trás $B^-(x, \rho)$ é a interseção de Ω com a imagem de Ω pela homotetia de centro x e o fator $(e^\rho - 1)$, seguido pela simetria central, centrada em x .

Figura 18: Representação das bolas da métrica Funk.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Demonstração. Seja $y \neq x$ um ponto em Ω . Se $F_\Omega(x, y) = 0$, então o raio $R(x, y)$ é contido em Ω , e por qualquer z naquele raio, nós temos $F_\Omega(x, z) = 0$. Portanto o raio é contido também em $B(x, \rho)$. Se $F_\Omega(x, y) = 0$, então $a = a_\Omega(x, y) \neq H_\infty$ e temos as seguintes condições equivalentes para qualquer ponto y no segmento $[x, a]$:

$$\begin{aligned}
 y \in B^+(x, \rho) &\Leftrightarrow \log \frac{|x - a|}{|y - a|} < \rho \\
 &\Leftrightarrow e^{\log \frac{|x - a|}{|y - a|}} < e^\rho \\
 &\Leftrightarrow \frac{|x - a|}{|y - a|} < e^\rho \\
 &\Leftrightarrow |x - a| < e^\rho |y - a| = e^\rho (|x - a| - |y - x|) \\
 &\Leftrightarrow |x - a| < e^\rho |x - a| - e^\rho |y - x| \\
 &\Leftrightarrow e^\rho |y - x| < e^\rho |x - a| - |x - a| \\
 &\Leftrightarrow e^\rho |y - x| < (e^\rho - 1) |x - a| \\
 &\Leftrightarrow |y - x| < \left(\frac{e^\rho - 1}{e^\rho} \right) |x - a| = \left(1 - \frac{1}{e^\rho} \right) |x - a| \\
 &\Leftrightarrow |y - x| < (1 - e^{-\rho}) |x - a|.
 \end{aligned}$$

Com isso, nós provamos o primeiro item. Para provar o segundo item, definimos $b = a_\Omega(y, x)$, então para qualquer ponto $y \in [x, a]$ nós temos $x \in [b, y]$, daí:

$$\begin{aligned}
 y \in B^-(x, \rho) &\Leftrightarrow \log \frac{|y - b|}{|x - b|} < \rho \\
 &\Leftrightarrow e^{\log \frac{|y - b|}{|x - b|}} < e^\rho \\
 &\Leftrightarrow e^\rho > \frac{|y - b|}{|x - b|} \\
 &\Leftrightarrow e^\rho |x - b| > |y - b| = |y - x| - |x - b| \\
 &\Leftrightarrow e^\rho |x - b| + |x - b| > |y - x| \\
 &\Leftrightarrow (e^\rho - 1) |x - b| > |y - x|.
 \end{aligned}$$

□

Desta forma, por exemplo, se Ω é o interior da bola euclidiana em $\mathbb{R}^n$, então qualquer bola para frente da métrica Funk $B^+(x_0, \delta)$ é também uma bola euclidiana. Entretanto, seu centro euclidiano não é o centro para a métrica Funk (a menos que x_0 é o centro de Ω). Considerando o exemplo 4.1, se Ω é a bola unitária euclidiana e $B^+(x_0, \delta) \subset \Omega$ é a bola de centro x_0 e raio ρ em Ω , então $y \in B^+(x_0, \delta)$ se e somente se $F_\Omega(x_0, y) \leq \rho$. Usando a fórmula 4.1, podemos ver que isso é equivalente a

$$\|y\|^2 - 2e^{-\rho}\langle y, x_0 \rangle + e^{-2\rho}\|x_0\|^2 \leq (1 - e^{-\rho})^2$$

Isto descreve a bola euclidiana com centro $z_0 = e^{-\rho}x_0$ e o raio $r = (1 - e^{-\rho})$. Vejamos agora algumas observações tiradas da proposição acima.

Observação 4.1. Quando o conjunto convexo Ω é ilimitado, as bolas para frente e bolas para trás são sempre não compactas.

Observação 4.2. Se Ω é limitado, então para qualquer $x \in \Omega$ e para ρ grande o suficiente temos que $B^-(x, \rho) = \Omega$. Isto segue da proposição 4.5. Em particular, as bolas fechadas para trás não são compactas para raios grandes.

Observação 4.3. A bola aberta para frente é geodesicamente convexa se, e somente se, Ω é estritamente convexo.

4.4 Geodésica

Definição 4.7. A curva parametrizada diferenciável $\gamma : I \rightarrow X$, onde $I \in \mathbb{R}$ em um espaço métrico fraco (X, d) é um mapa contínuo. O comprimento de arco de $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ é definido por

$$L(\gamma) = \sup \sum_{i=0}^{N-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})),$$

onde o supremo é tomado sobre todas as subdivisões $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$.

Definição 4.8. Uma curva diferenciável $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ é uma *geodésica* se $d(\gamma(a), \gamma(b)) = L$, onde L é *comprimento do arco* da curva. O espaço métrico fraco (X, d) é considerado um *espaço métrico geodésico fraco* se existe uma curva geodésica conectando qualquer par de pontos. É dito ser *unicamente geodésica* se a curva geodésica é única até reparametrização. Um subconjunto $A \subset X$ é chamado de geodesicamente convexo se dado dois pontos em A , qualquer curva geodésica juntando eles é contida em A .

Lema 4.1. *Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ uma curva parametrizada diferenciável. γ é geodésica se, e somente se, para qualquer t_1, t_2, t_3 em $[a, b]$ satisfazendo $t_1 \leq t_2 \leq t_3$ temos que $d(\gamma(t_1), \gamma(t_3)) = d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) + d(\gamma(t_2), \gamma(t_3))$.*

Demonstração. A prova é uma consequência das definições. $\square$

4.5 Ponto de vista projetivo

Agora consideramos a seguinte generalização da geometria Funk. Dizemos que um subconjunto $U \subset \mathbb{RP}^n$ é convexo se não contém qualquer linha projetiva completa e se a interseção de qualquer linha projetiva $L \subset \mathbb{RP}^n$ com U sendo um conjunto conectado. Se U e Ω são domínios conectados em $\mathbb{RP}^n$ com $\Omega \subset U$, e se x, y são dois pontos distintos em Ω , denotamos por $a_\Omega(x, y) \in \partial\Omega$ e $\omega_\Omega(x, y) \in \partial U$ os pontos na linha L que passa por x e y na seguinte ordem a, y, x, ω .

Definição 4.9. (*Métrica Funk Relativa*). A métrica Funk relativa para $\Omega \subset U$ é definida por $F_{\Omega, U}(x, x) = 0$ e por

$$F_{\Omega, U}(x, y) = \log \left(\frac{|y - \omega|}{|x - \omega|} \cdot \frac{|x - a|}{|y - a|} \right), \text{ se } x \neq y.$$

A métrica funk relativa é a métrica fraca projetiva, é invariante sob transformações projetivas no sentido que se $f : \mathbb{RP}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ é transformação projetiva, então

$$F_{\Omega, U}(x, y) = F_{f(\Omega), f(U)}(f(x), f(y)).$$

Observe também que se $U \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio convexo adequado, então

$$F_{\Omega, U}(x, y) = F_\Omega(x, y) +^r F_U(x, y).$$

Lema 4.2. *Caso $U = \mathbb{R}^n$ temos que*

$$F_{\Omega, U}(x, y) = F_\Omega(x, y).$$

Demonstração. Se $U = \mathbb{R}^n$ então o limite é o hiperplano no infinito H_∞ e portanto $\frac{|y - \omega|}{|x - \omega|} = 1$ para qualquer $x, y \in \Omega$. $\square$

Lembramos que não há um hiperplano preferido no espaço projetivo, assim, a geometria Funk clássica é um caso especial da geometria Funk relativa onde o domínio englobando $U \subset \mathbb{RP}^n$ é o complemento de um hiperplano.

5 APLICAÇÕES DA MÉTRICA FUNK

Neste capítulo mostraremos algumas das aplicações da métrica Funk e propriedades destas aplicações. Recomendamos ao leitor uma leitura prévia de (ANTONELLI, 2003), (HILBERT, 1902), (SHEN, 2001a) e (SHEN, 2001b). Para uma leitura aprofundada temos (MO; SHEN; YANG, 2006), (PAPADOPOULOS; TROYANOV, 2009) e (CHERN; SHEN, 2005).

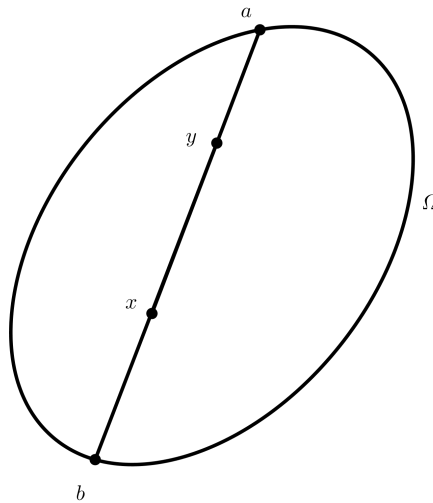
5.1 Métrica Hilbert

Definição 5.1. (*Métrica Hilbert*). A *métrica Hilbert* em domínio convexo adequado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é definido por

$$H_{\Omega}(x, y) = \frac{1}{2} (F_{\Omega}(x, y) + {}^r F_{\Omega}(y, x)),$$

onde Ω é considerado um subconjunto de $U \subset \mathbb{RP}^n$.

Figura 19: Métrica Hilbert.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Esta métrica é uma métrica fraca projetiva, note que $x \neq y$, daí

$$H_{\Omega}(x, y) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{|y - b|}{|x - b|} \cdot \frac{|x - a|}{|y - a|} \right),$$

onde $a = a_{\Omega}(x, y)$ e $b = a_{\Omega}(y, x)$.

Observação 5.1. A métrica Hilbert coincide com a metade da métrica Funk relativa do domínio Ω em relação a si mesma:

$$H_{\Omega}(x, y) = \frac{1}{2} F_{\Omega, \Omega}(x, y).$$

Se Ω é a bola unitária euclidiana, a distância de Hilbert coincide com o modelo de Klein de espaço hiperbólico. Aplicando a geometria de Funk obtemos vários resultados na geometria de Hilbert. Em particular, aplicando 4.1 obtemos a seguinte proposição:

Proposição 5.1. *A métrica Funk em um domínio convexo $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ satisfaz as seguintes propriedades:*

- (a) $H_{\Omega}(x, y) \geq 0$ e $H_{\Omega}(x, x) = 0, \forall x, y \in \Omega$.
- (b) $H_{\Omega}(x, z) \leq H_{\Omega}(x, y) + H_{\Omega}(y, z), \forall x, y, z \in \Omega$.
- (c) H_{Ω} é projetiva, isto é, $H_{\Omega}(x, z) = H_{\Omega}(x, y) + H_{\Omega}(y, z)$ quando z é um ponto no segmento $[x, y]$.
- (d) A métrica fraca H_{Ω} é simétrica, isto é, $H_{\Omega}(x, y) = H_{\Omega}(y, x)$ para qualquer x e y .
- (e) $x \neq y \Rightarrow H_{\Omega}(x, y) > 0$, se e somente se, o domínio Ω não contém nenhuma linha reta.
- (f) A métrica fraca H_{Ω} é ilimitada.

Demonstração. A prova dessa proposição provém das definições e da proposição 4.1. □

Observação 5.2. Se o domínio convexo $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ não contém nenhuma linha reta, então H_{Ω} é uma métrica clássica e é completa. Ainda mais, um domínio convexo que não contém nenhuma linha reta é chamado de domínio convexo agudo.

5.2 Métrica Finsler

Definição 5.2. (*Norma de Minkowski*). Dizemos que a função contínua $F : V \rightarrow [0, +\infty)$ é uma *norma de Minkowski* em V se

- (a) F é C^{∞} em $V \setminus \{0\}$,
- (b) $F(\lambda y) = \lambda F(y), \forall y \in V, \lambda \geq 0$. Dizemos que F é positivamente homogênea de grau 1,

(c) $\forall y \in V \setminus \{0\}$, a forma bilinear simétrica

$$g_y(u, v) := \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} F^2(y + su + tv)|_{s=t=0}$$

é positiva-definida. Dizemos que F^2 é estritamente convexa.

O par (V, F) é chamado de *espaço de Minkowski*.

Exemplo 5.1. Um produto interno positivo definido $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em V induz uma norma de Minkowski $F(y) := \sqrt{\langle y, y \rangle}$.

Exemplo 5.2. Consideremos a métrica Funk definida anteriormente, vamos construir uma norma de Minkowski em cada espaço tangente $T_p\Omega$. Dados $x \in \Omega$ e $y \in T_p\Omega \simeq \mathbb{R}^2$, definimos a norma de y por

$$\begin{aligned} F(y) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{d(x, x + \epsilon y)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\epsilon} \log \left(\frac{|a - x|}{|a - x - \epsilon y|} \right) \\ &= \frac{\langle y, a - x \rangle}{|a - x|}. \end{aligned}$$

onde a é a interseção da semirreta por x que passa em $x + \epsilon y$, $\epsilon > 0$, com o bordo $\partial\Omega$. Percebe-se que $\epsilon > 0$. Segue que para todo $x \in \Omega$, o conjunto

$$S_x := \{y \in T_p\Omega \simeq \mathbb{R}^2; F(y) = 1\}$$

coincide geometricamente com $\partial\Omega$.

Definição 5.3. (*Métrica de Finsler*). Seja M uma variedade diferenciável. Definimos uma função contínua

$$F : TM \rightarrow [0, +\infty)$$

como uma *métrica Finsler* em M se F satisfaz

- (a) F é C^∞ em TM_0 , o fibrado tangente com a seção nula removida,
- (b) $F(\lambda v) = \lambda F(v)$, $\forall v = (x, y) \in TM$, $\lambda > 0$, onde denotamos $\lambda v = (x, \lambda y)$,
- (c) A forma bilinear simétrica $g_v : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$g_v(u, w) := \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} F^2(y + su + tv)|_{s=t=0}, \forall u, w \in T_x M,$$

é positiva-definida $\forall v = (x, y) \in TM_0$.

O par (M, F) é chamado de *variedade Finsler*.

6 CONCLUSÃO

Acreditamos ter alcançado o objetivo deste trabalho, conseguimos apresentar os principais conceitos e resultados da métrica Funk e apresentamos algumas aplicações de uma área que vem crescendo muito ultimamente e de grande importância na geometria.

Os conhecimentos de Espaço Métricos e Geometria Diferencial foram de extrema importância para o desenvolvimento desta pesquisa, os conteúdos utilizados podem ser utilizados na compreensão de vários conteúdos relacionados. Este conhecimento pode ajudar o aluno que estuda estas disciplinas que são eletivas, pois aquele que deseja continuar a sua formação acadêmica necessita destes conteúdos na sua formação e o conteúdo aqui exposto ajuda a atingir este objetivo.

Com a realização deste trabalho foi possível perceber que a matemática é muito abrangente, ela se apresenta de diferentes maneiras em diversas áreas, com isso destaca cada vez mais a importância da matemática.

Contudo, com esta pesquisa foi possível mostrar ao leitor um pouco sobre este tema e os diferentes modos em que pode ser estudado. Esperamos que com o que foi mostrado o leitor procure saber mais sobre esta área de estudo.

REFERÊNCIAS

- ANTONELLI, P. L. **Handbook of Finsler Geometry**. London: Springer Science & Business Media, 2003. v. 2.
- BUSEMANN, H. **The Geometry of Geodesics**. New York: Academic Press, 1955.
- CARMO, M. P. do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
- CHERN, S.-S.; SHEN, Z. **Riemann-Finsler Geometry**. 6. ed. Hackensack, NJ: World Scientific Publishing Company, 2005.
- FUNK, P. **Über Geometrien, bei denen die Geraden die Kürzesten sind**. *Mathematische Annalen*, Springer, v. 101, p. 226–237, 1929.
- HILBERT, D. **Mathematical Problems**. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 8, n. 10, p. 437–479, 1902.
- LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.
- LIMA, E. L. **Análise Real**. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. v. 1.
- MO, X.; SHEN, Z.; YANG, C. **Some Constructions of Projectively Flat Finsler Metrics**. *Science in China Series A*, Springer, v. 49, p. 703–714, 2006.
- PAPADOPOULOS, A.; TROYANOV, M. **Weak Finsler Structures and the Funk Weak Metric**. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. Cambridge, 2009. v. 147, p. 419–437.
- PAPADOPOULOS, A.; TROYANOV, M. **Handbook of Hilbert Geometry**. *European Mathematical Society (EMS)*, Zürich, v. 22, 2014.
- SHEN, Z. **Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces**. London: Kluwer Academic Publishers, 2001.
- SHEN, Z. **Lectures on Finsler Geometry**. Singapore: World Scientific, 2001.

APÊNDICE A – ÍNFINO E SUPREMO

Este apêndice mostra alguns conceitos e resultados que ajudam o leitor a compreender o trabalho. Recomendamos o leitor, a leitura de (LIMA, 2016).

Definição A.1. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito *limitado superiormente* quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq a$, para todo $x \in X$. Chamamos a de *cota superior* de X . Do mesmo modo, dizemos que $X \subset \mathbb{R}$ é *limitado inferiormente* quando existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b \leq x, \forall x \in X$. Chamamos b de *cota inferior* de X .

Definição A.2. Seja $X \subset \mathbb{R}$, chamamos de *limitado* quando é limitado superior e inferiormente. Isto quer dizer que há um intervalo limitado $[a, b]$ tal que $X \subset [a, b]$. É condição abaixo também é muito utilizada:

X é limitado se existe $k > 0$ tal que $|x| \leq k, \forall x \in X$.

Exemplo A.1. Considere o conjunto $Z = (1, 4] \subset \mathbb{R}$. Observe que Z é limitado superiormente pois 5 é cota superior visto que $z \leq 5, \forall z \in Z$, e também inferiormente pois 0 é cota inferior visto que $0 \leq z, \forall z \in Z$.

Exemplo A.2. O conjunto $X = (1, 5) \subset \mathbb{R}$ é limitado, pois, existe $6 \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $|x| \leq 6, \forall x \in X$.

Definição A.3. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado superiormente. Chamamos b de *supremo* de X quando b é a menor das cotas superiores de X . Explicitamente temos:

- a) $x \leq b, \forall x \in X$ (b é cota superior de X);
- b) Se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que c é cota superior de X ($x \leq c, \forall x \in X$), então $b \leq c$ (b é a menor das cotas superiores).

O item b) pode também ser reformulado assim:

- b)' Se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c < b$ então existe $x \in X$ tal que $c < x \leq b$ (c não é cota superior de X)

Escrevemos $b = \sup X$ para indicar que b é o supremo do conjunto X .

Definição A.4. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado inferiormente. Consideramos a o *ínfimo* de X quando a é a maior das cotas inferiores de X . Explicitamente temos:

- a) $a \leq x, \forall x \in X$ (a é cota inferior de X);

- b) Se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que c é cota inferior de X ($c \leq x, \forall x \in X$), então $c \leq a$ (a é a maior das cotas inferiores).

O item b) pode também ser reformulado assim:

- b)' Se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $a < c$ então existe $x \in X$ tal que $a \leq x < c$ (c não é cota inferior de X)

Escrevemos $a = \inf X$ para indicar que a é o ínfimo do conjunto X .

Observação A.1. O conjunto $\mathbb{R}$ é *completo*, isto é, todo conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente possui supremo. Do mesmo modo, todo conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente possui ínfimo.

Exemplo A.3. $\mathbb{Q}$ não é completo. Seja $\mathbb{Q} \cup [0, \sqrt{3}) = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x < \sqrt{3}\}$. Em $\mathbb{R}$ o supremo de $\mathbb{Q} \cup [0, \sqrt{3})$ seria $\sqrt{3}$, mas $\mathbb{Q} \cup [0, \sqrt{3})$ não tem supremo em $\mathbb{Q}$.

Exemplo A.4. O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é ilimitado superiormente. Com efeito, suponha que $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente. Portanto, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c = \sup \mathbb{N}$. Assim, $c - 1$ não é cota superior de $\mathbb{N}$ e com isso existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$c - 1 < n \leq c \Rightarrow c < n + 1 = s(n) \in \mathbb{N},$$

um absurdo, pois contradiz o fato de c ser cota superior de $\mathbb{N}$. Logo, o conjunto $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente.

Exemplo A.5. Mostre que se $X = \left\{ \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\}$ então $\inf X = 0$.

Com efeito, como $n > 0$ então $0 < \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja 0 é cota inferior de X . Agora nos falta mostrar que qualquer número real $c > 0$ não é cota inferior de X . De fato, dado $c > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{1}{c}$ (pois $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente), isto é, $c > \frac{1}{n_0}$. Dessa forma, dado $c > 0$, obtemos um elemento de X , $\frac{1}{n_0}$, tal que

$$0 < \frac{1}{n_0} < c.$$

Então, c não é cota inferior de X , portanto $\inf X = 0$.