

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS - UFAL
***CAMPUS* ARAPIRACA**
FÍSICA - LICENCIATURA

EMANUEL PINHEIRO SANTOS

**OBSERVAÇÕES ESTATÍSTICAS E EXPERIMENTAIS DAS FLUTUAÇÕES DE
INTENSIDADE DE LASERS**

ARAPIRACA

2021

Emanuel Pinheiro Santos

Observações estatísticas e experimentais das flutuações de intensidade de lasers

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciatura em Física da Universidade Federal de Alagoas - UFAL, Campus de Arapiraca.

Orientador: Prof. Dr. André de Lima Moura.

Arapiraca

2021

Universidade Federal de Alagoas – UFAL
Biblioteca Campus Arapiraca - BCA
Bibliotecário Responsável: Nestor Antonio Alves Junior

CRB - 4 / 1557

S237o Santos, Emanuel Pinheiro
Observações estatísticas e experimentais das flutuações de intensidade de lasers /
Emanuel Pinheiro Santos. – Arapiraca, 2021.
76 f.: il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) - Universidade Federal
de Alagoas, *Campus Arapiraca*, Arapiraca, 2021.

Orientador: Prof. Dr. André de Lima Moura

Bibliografia: p. 64-66.

Apêndices: p. 67-76.

1. Laser. 2. Laser aleatório. 3. Estatística. 4. Monte Carlo (Método). I. Moura, André
de Lima. II. Título.

CDU 53


Emanuel Pinheiro Santos

Observações estatísticas e experimentais das flutuações de intensidade de lasers

Monografia apresentada como requisito parcial para
obtenção do grau de Licenciado em Física da Uni-
versidade Federal de Alagoas - UFAL, Campus de
Arapiraca.

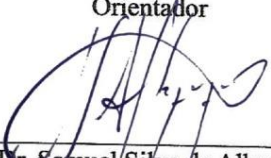
Data de Aprovação: 08/01/2021

Banca Examinadora



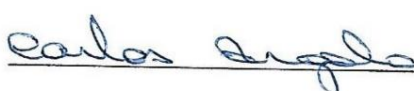
Prof. Dr. André de Lima Moura
Universidade Federal de Alagoas – UFAL
Campus de Arapiraca

Orientador



Prof. Dr. Samuel Silva de Albuquerque
Universidade Federal de Alagoas – UFAL
Campus de Arapiraca

Examinador



Prof. Dr. Carlos Argolo Pereira Alves
Instituto Federal de Alagoas – Maceió
Examinador

Eternamente grato aos meus genitores: Elza
Pinheiro e Noel Barbosa.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente ao Criador do(s) universo(s) que nos permitiu observá-lo(s), estudá-lo(s) e entender que a cada passo de aprendizagem, algo mais curioso há para ser descoberto.

À meus pais Elza Pinheiro e Noel Barbosa pelo imenso carinho e apoio durante esta etapa da minha vida. Sem eles eu não seria capaz de chegar aqui.

Aos meus irmãos Nael, Natanaelle e Natanael pelo apoio e companheirismo durante toda nossa jornada de vida. (E ao meu gato que está conosco há 15 anos rsrs)

À minha esposa Thayna Soares por toda paciência e apoio durante esta fase. E sua família (Alexandre, Lucidalva e Lucas) que está presente desde o início da minha graduação.

Aos amigos que conheço há muito tempo e que foram importantes neste processo da minha vida. Posso acabar esquecendo algum nome, então não citarei. Agradeço a todos vocês.

Aos amigos que fiz durante o curso, em especial a turma do PILAF (Projeto Integrador da Luz dos Amigos Físicos) e CDE (Casa Do Evilásio) – Evilásio, Jório, Vitor, Samuel, Daiane, Hérika, Ana, Regiane, Ihathowyth e Talles – e aos demais companheiros que conheci no início do curso, em que perdi o contato, e aos que vim conhecer no final, meus agradecimentos. E também aos que conheci no processo de Iniciação Científica: Everton, Pâmela, Ícaro, Júlio, Gutemberg, Alisson, Erick, Bruno, Rodrigo, Célio, técnico Geraldo e professor Jefferson.

Ao corpo docente, em especial ao professor Emerson que tem sido o “padrinho” de nossa turma, sendo nosso professor em quase todos os períodos e sempre passando muitos trabalhos para fazermos no final da semana, além de colocar apelido na galera (rsrs) e o meu foi “quinta série” (rsrs). Contudo, tenho muito a agradecer à todos os professores.

Ao meu orientador professor André, por estar sempre se mostrando um modelo de pesquisador em quem podemos nos inspirar, além de permitir que seus orientandos tenham oportunidade de conhecer o mundo da pesquisa científica sempre tentando nos envolver em projetos e estudos. Agradeço-o também por todo apoio durante os eventos que participamos.

Ao professor Carlos Argolo que, mesmo eu só o tendo conhecido na metade da graduação, se tornou um exemplo de pesquisador, professor e um grande coorientador. Também quero mencionar o professor Samuel, que junto ao professor Argolo e professor André tem sido meus primeiros mestres no âmbito da pesquisa científica.

Às agências de investimento à pesquisa CNPq e CAPES. O investimento é importante para a formação do pesquisador e, consequentemente, para a humanidade.

À Universidade Federal de Alagoas.

Hey, Dad, look at me... Did I grow up according
to plan?

Simple Plan

RESUMO

Existem basicamente dois modos de emissão LASER (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation) discutidos na literatura: o “laser convencional” e o “laser aleatório”. O laser convencional é gerado ao se aprisionar um feixe de luz entre dois espelhos e fazê-lo atravessar um certo meio de ganho (cristal, pó, gás...) que emite luz com eficiência. Como o feixe de luz é refletido de volta para o meio de ganho por causa da refletividade dos espelhos, novos feixes de luz de mesmo comprimento de onda são gerados e assim a luz escapa por um dos espelhos com muita intensidade. A amplificação de luz por emissão estimulada da radiação já tinha sido prevista em trabalhos anteriores escritos por Einstein. Existe também o MASER, que segue o mesmo princípio do Laser só que para micro-ondas. O outro tipo de emissão estimulada, investigado na literatura, são os Lasers Aleatórios (LAs). Os LAs diferem dos lasers convencionais pelo fato de que a realimentação óptica não é provida por espelhos e sim devido a partículas espalhadoras aleatoriamente distribuídas no meio de ganho, ou seja, um laser sem cavidade óptica. Este segundo tipo de laser, proposto teoricamente por Letokhov em 1967, gerou um grande interesse da comunidade científica, principalmente a partir da sua primeira demonstração não ambígua em 1994 por Lawandy e colaboradores. Dentre as muitas investigações experimentais e teóricas nestes lasers, um fenômeno tem atraído bastante a atenção dos cientistas: as “flutuações das intensidades” observadas em realizações experimentais sob as mesmas condições iniciais. Neste trabalho revisamos algumas descobertas sobre as flutuações de intensidade dos lasers aleatórios, tanto no contexto experimental quanto teórico. A partir disto, mostramos de maneira experimental e computacional que algumas características encontradas nos lasers aleatórios podem ser também encontradas nos lasers convencionais, tais como as flutuações das intensidades de saída. Com isto, demonstramos pela primeira vez os voos de Lévy para lasers ordenados e a Lei de Lévy-Pareto para o mesmo sistema. Realizamos tais estudos de maneira experimental e numérica através de simulações Monte Carlo. Conseguimos então mostrar que as transições de regimes estatísticos até então relatadas para lasers aleatórios, “Gaussiana-Lévy-Gaussiana”, também podem ser observadas em lasers convencionais, que são sistemas ordenados. Por fim, relatamos quais são os parâmetros responsáveis para as observações estatísticas e experimentais das flutuações de intensidade de saída dos lasers.

Palavras-chave: Laser. Laser aleatório. Estatística. Monte Carlo.

ABSTRACT

There are basically two modes of LASER (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation) emission, discussed in the literature: the “conventional laser” and the “random laser”. The conventional laser is generated by trapping a beam of light between two mirrors and making it pass through a certain medium of gain (crystal, dust, gas ...) that emits light efficiently. As the beam of light is reflected back to the gain medium because of the reflectivity of the mirrors, new beams of light of the same wavelength are generated and, thus, the light escapes through one of the mirrors with great intensity. The amplification of light by stimulated emission has already been considered in previous works written by Einstein. In addition, there is also the MASER, which follows the same principle as the laser but with microwaves. The other type of stimulated emission, investigated in the literature, are the Random Lasers (RLs). RLs differ from conventional lasers in that optical feedback is not provided by mirrors, but by scattering particles randomly distributed in the gain medium, i.e., a laser without an optical cavity. This second type of laser, proposed theoretically by Letokhov on 1967, generated great interest in the scientific community, mainly from its first unambiguous demonstration in 1994 by Lawandy and collaborators. From many investigations on these lasers, a phenomenon has attracted the attention of scientists: the “fluctuations of intensities”, observed in experimental realizations under same identical conditions. In this work, we review some findings about the intensity fluctuations of random lasers, both in the experimental and theoretical context. From here, we show in an experimental and computational way that some characteristics shown in random lasers can also be found in the conventional lasers, such as output intensities fluctuations. With that, we report for the first time, the Lévy flights for ordered lasers and the Lévy-Pareto Law for the same system. We carry out such studies experimentally and numerically through Monte Carlo simulations. We were then able to show that the transitions of statistical regimes hitherto reported for random lasers, “Gaussian-Lévy-Gaussian”, also occur for conventional lasers, where that is an ordered regime. Finally, we report what are the parameters responsible for the statistical and experimental observations of the fluctuations in the output intensity of the lasers.

Key words: Laser. Random laser. Statistical. Monte Carlo.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Processo de Absorção.....	14
Figura 2 – Processo de Emissão Espontânea.....	15
Figura 3 – Processo de Emissão Estimulada	15
Figura 4 – Laser de Rubi de T.H. Maiman	16
Figura 5 – Observação dos espectros do laser de excitação e o laser de corante	19
Figura 6 – Configuração Experimental para observação das FIL	20
Figura 7 – Modelo Atômico de Bohr.....	21
Figura 8 – Representação em níveis de energia para espalhamentos	22
Figura 9 – Processos de ressonância e Fluorescência.....	23
Figura 10 – Laser convencional.....	25
Figura 11 – Sistemas de 2, 3 e 4 níveis	30
Figura 12 – Diferenças entre luz poli, monocromática e laser	31
Figura 13 – Histograma das somas de valores aleatórios.....	33
Figura 14 – Teorema central do limite para 100, 1000 e 5000 repetições.....	34
Figura 15 – Caminhante aleatório unidimensional.....	35
Figura 16 – Caminhante aleatório bidimensional.....	36
Figura 17 – Histograma do passeio aleatório	36
Figura 18 – Eventos raros e cauda longa.....	37
Figura 19 – Voos de Lévy.....	38
Figura 20 – Densidade de probabilidade da distribuição de Lévy	39
Figura 21 – Soluções das equações de taxa.....	41
Figura 22 – Laser produzido num meio desordenado	42
Figura 23 – Transição de regimes estatísticos em lasers aleatórios.....	44
Figura 24 – Expoente de Lévy em função do ganho	45
Figura 25 – Configuração experimental para análise das FIL convencionais	46
Figura 26 – Voos de Lévy para lasers ordenados	47
Figura 27 – Sistema ilustrativo 1D para amplificação de luz.....	48
Figura 28 – Simulação Monte Carlo para as FIL ordenados	49
Figura 29 – Refletividade em função do ganho e do expoente de Lévy	50
Figura 30 – Transição de regimes Gaussiano – Lévy-Pareto – Gaussiano.....	51
Figura 31 – Quebra de simetria de réplica em laser aleatório	53
Figura 32 – Quebra de simetria de réplica em laser ordenado	54

Figura 33 – Atrator de Lorenz 3D	57
Figura 34 – Sinal caótico do atrator de Lorenz	57
Figura 35 – Atrator de Rossler 3D	59
Figura 36 – Solução temporal do modelo de Verhulst.....	60
Figura 37 – Mapa logístico.....	61
Figura 38 – Zoom no mapa logístico.....	61

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LASER	Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation
MASER	Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation
LA	Laser Aleatório
RL	Random Laser
MMC	Método de Monte Carlo
SH	Segundo Harmônico
TCL	Teorema Central do Limite
FIL	Flutuações de Intensidade dos Lasers
TCC	Trabalho de Conclusão do Curso
QSR	Quebra de Simetria de Réplica
CD	Caos Determinístico

SUMÁRIO

1	UM POUCO DE HISTÓRIA E A INTRODUÇÃO	13
1.1	O PRINCÍPIO DO LASER	14
1.2	INTRODUÇÃO AOS LASERS ALEATÓRIOS E A ESTATÍSTICA	16
1.2.1	O Método de Monte Carlo	18
1.3	O QUE SÃO AS FLUTUAÇÕES DE INTENSIDADE DOS LASERS?	19
2	PROCESSOS ATÔMICOS E EXCITAÇÃO DE ÁTOMOS	21
2.1	ESPALHAMENTO ELÁSTICO E INELÁSTICO	22
2.2	RADIAÇÃO DE RESSONÂNCIA E FLUORESCÊNCIA	23
3	O LASER	25
3.1	OS COEFICIENTES DE EINSTEIN E AS EQUAÇÕES DE TAXA	26
3.2	SISTEMAS DE 3 E 4 NÍVEIS	29
3.3	O QUE DIFERENCIA O LASER DE OUTRAS FONTES DE LUZ?	31
4	ESTATÍSTICA E SIMULAÇÕES DE MONTE CARLO	33
4.1	TEOREMA CENTRAL DO LIMITE	33
4.2	O CAMINHANTE ALEATÓRIO	35
4.3	EVENTOS RAROS, CAUDA LONGA E VOOS DE LÉVY	37
4.4	A DISTRIBUIÇÃO DE LÉVY	38
5	EQUAÇÕES DE TAXA ACOPLADAS NA FORMA COMPLETA	40
6	O LASER ALEATÓRIO (LA)	42
6.1	REGIMES ESTATÍSTICOS PARA AS FIL ALEATÓRIOS	43
7	DISTRIBUIÇÃO DE LÉVY PARA AS FIL CONVENCIONAIS	46
8	DISTRIBUIÇÃO DE LÉVY-PARETO EM LASERS CONVENCIONAIS	51
9	PERPECTIVAS	52
9.1	ANÁLISE DA CORRELAÇÃO PARA AS FIL	52
9.2	QUEBRA DE SIMETRIA DE RÉPLICA	53
9.3	CAOS EM SISTEMAS DINÂMICOS E LASERS	55
9.3.1	Caos Determinístico em Sistemas Dissipativos	55
9.3.2	Atrator de Lorenz	56
9.3.3	Atrator de Rossler	58
9.3.4	Mapa Logístico	59

9.4	NANOTERMOMETRIA	62
9.4.1	Avalanche de Fótons	62
9.5	QUESTIONAMENTOS E CONSIDERAÇÕES FINAIS	63
	REFERÊNCIAS.....	64
	APÊNDICE A – PROGRAMAS EM PYTHON.....	66
	APÊNDICE B – PUBLICAÇÕES	74

1 UM POUCO DE HISTÓRIA E A INTRODUÇÃO

Quando falamos sobre o comportamento estatístico de determinado conjunto de dados, significa que tomamos uma quantidade suficiente de medidas para analisá-las. Por sua vez podemos nos confrontar com um sistema determinístico, ou seja, somos capazes de prever os resultados seguintes a partir dos dados iniciais das medidas, ou num sistema probabilístico, onde neste caso teremos uma probabilidade associada a cada medida realizada ou futura. Dessa forma podemos definir a estatística como a análise e interpretação dos dados de um espaço amostral ou, de maneira mais técnica, “a Estatística é uma ciência que se dedica ao desenvolvimento e ao uso de métodos para a coleta, resumo, organização, apresentação e análise de dados” (FARIAS; SOARES; CESAR, 2003). Apesar da difusão da Estatística em diversas áreas como na física, matemática, economia, meteorologia, etc, este é um dos campos da ciência mais antigos que nasceu no período remoto da antiguidade.

Acredita-se que os primeiros registros de dados estatísticos foram associados a prisioneiros do Egito antigo por volta de 3000 a.C. onde estes escreviam nas rochas utilizando gravetos ou pedras. A Estatística é utilizada por povos de todas as culturas uma vez que temos a constante necessidade de fazer contagens, avaliar valores e encontrar resultados melhores para nossos problemas. Uma análise mais refinada da estatística que conhecemos hoje nasceu junto com a teoria das probabilidades entre os séculos XVI e XVII, onde diversos cientistas se interessavam em resolver problemas cujo caráter era probabilístico. Naquela época era muito comum matemáticos proporem desafios e suas soluções. Dentre estes, podemos citar Blaise Pascal (1623 – 1662) e Pierre Fermat (1601 – 1665), pioneiros na teoria das probabilidades.

Apesar de toda a história, onde os registros se perdem pelo tempo, vamos dar um salto para os dias atuais e introduzir a estatística dentro da Física. Na física temos diversos problemas que são interpretados através de teorias, regras e leis estatísticas. Um dos problemas experimentais clássicos explicado por teoria estatística na física é o “caminhante aleatório”. Este problema é tão importante para o entendimento deste trabalho que deixamos uma seção especialmente para ele no capítulo 4. Para afunilar ainda mais o conteúdo a ser tratado neste trabalho, nosso interesse é usar o contexto da física estatística dentro de um outro campo da física: Óptica.

A óptica é o estudo da luz e seus fenômenos e é um dos campos mais antigos da ciência. Uma das primeiras descobertas da óptica foi nos fornecida por Isaac Newton em 1704, com a explicação do arco-íris e alguns fenômenos corpusculares da luz. Séculos depois, vale ressaltar

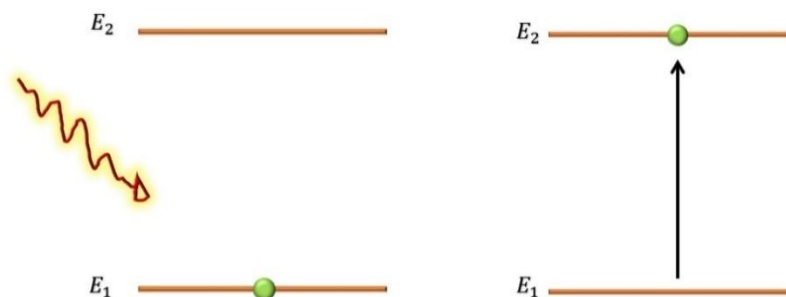
aqui que na transição entre os séculos XIX e XX, um outro cientista mostrou que a óptica também era um ramo do eletromagnetismo através de um conjunto de equações que leva seu nome: Equações de Maxwell. Então, após as contribuições de Max Planck em 1900 considerando mais uma vez a radiação como partícula, a luz ficou compreendida como um ente cujo caráter possui comportamento dual, tanto corpuscular quanto ondulatório.

A óptica proporcionara uma grande evolução científica e tecnológica e por causa disto podemos citar algumas invenções revolucionárias como as lentes oculares, máquinas fotográficas, luminárias, televisores, e também surgiram os lasers em 1960, o qual reservamos um capítulo especialmente para eles mais à frente. Uma vez que trataremos dos lasers a partir de então, aqui vai sua definição: a palavra “Laser” significa “Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation”, o que em português significa “amplificação de luz por emissão estimulada de radiação”.

1.1 O PRINCÍPIO DO LASER

O princípio do laser foi previsto teoricamente por Albert Einstein (EINSTEIN, 1917) onde tratou sobre o processo de emissão estimulada de luz. Antes disso, partindo desde o eletromagnetismo de Maxwell às contribuições de Hertz, Rutherford e Bohr, já eram conhecidos os processos de absorção (figura 1) e emissão espontânea (figura 2). O primeiro ocorre quando uma radiação incide num sistema cuja diferença dos níveis de energia ($\Delta E = E_2 - E_1$) é igual a sua energia ($E = h\nu$), onde h é a constante de Planck e ν é a frequência da radiação incidente. Ao absorver a energia da radiação, o átomo passa do estado fundamental (E_1) para o estado de maior energia, ou estado excitado, E_2 .

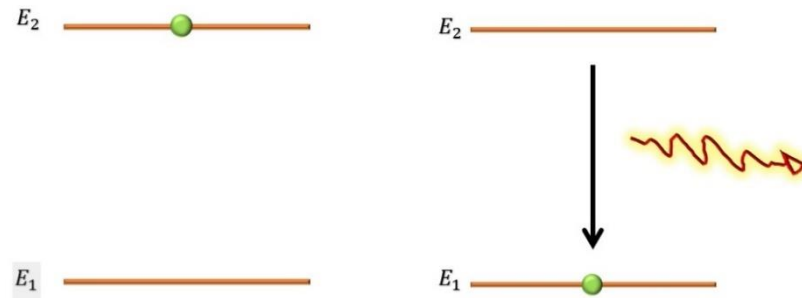
Figura 1 – Processo de Absorção.



Fonte: O autor (2020).

O segundo, sobre a emissão espontânea, seria o processo inverso à absorção. Neste caso o átomo retorna espontaneamente ao nível fundamental (E_1) e assim libera a radiação.

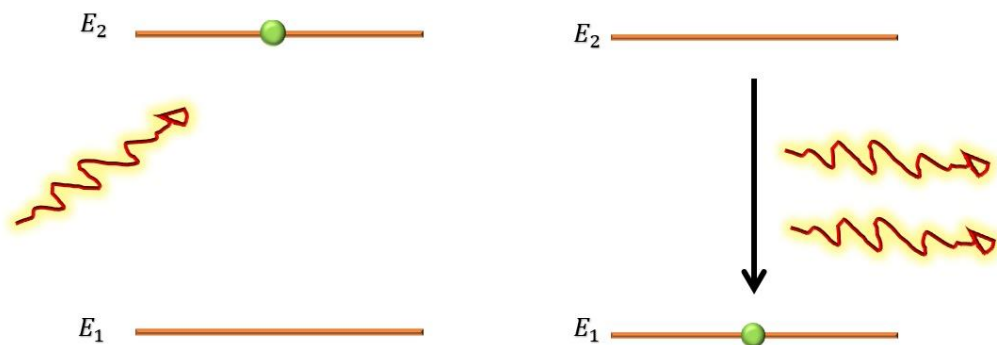
Figura 2 – Processo de Emissão Espontânea.



Fonte: O autor (2020).

A proposta teórica de Einstein foi que o sistema excitado poderia retornar ao nível fundamental não apenas de forma espontânea, mas também de maneira estimulada. No regime de emissão estimulada, um fóton incide no átomo que está no nível de maior energia e o átomo relaxa de maneira estimulada ao nível fundamental liberando um fóton idêntico ao que o estimulou (figura 3).

Figura 3 – Processo de Emissão Estimulada.

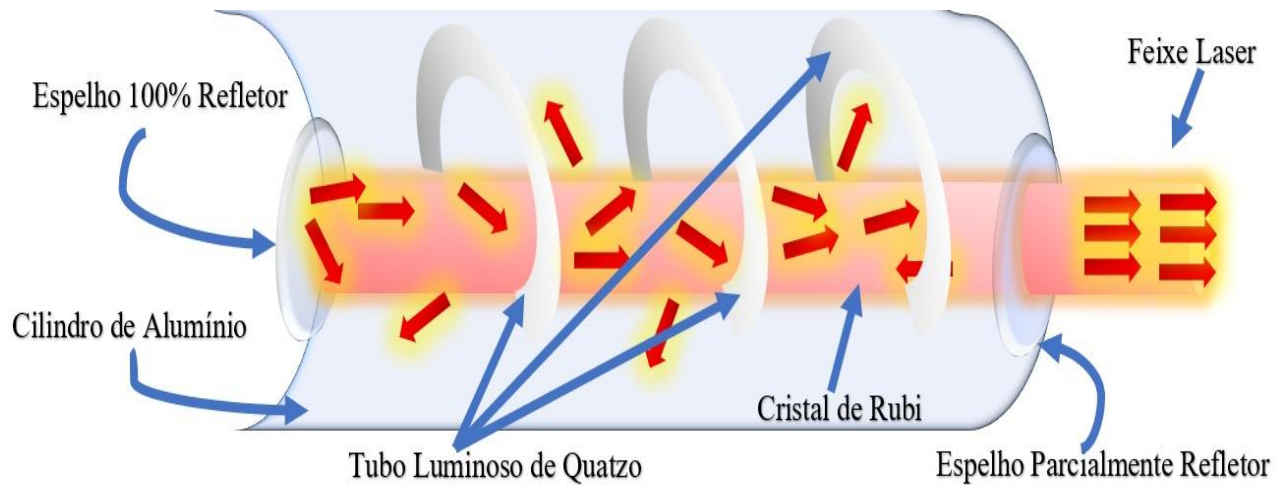


Fonte: O autor (2020).

Desse modo houve amplificação da luz, uma vez que entrou um fóton no sistema e saíram dois. Para estes processos, abordaremos as equações teóricas no próximo tópico.

E então, em 1960, a teoria de Einstein veio receber uma grande aplicação realizada pelo físico Theodore Harold Maiman, ao inventar o laser de rubi, representado na figura 4.

Figura 4 – Laser de Rubi inventado por T. H. Maiman.



Fonte: O autor (2020).

Maiman utilizou dois espelhos, que formam uma cavidade óptica, cujo primeiro espelho é 100% refletor e o segundo deve ser parcialmente refletor, ou seja, neste segundo espelho, parte da luz reflete e parte da luz refrata. O objetivo era excitar os átomos de um cristal de rubi (Al_2O_3), dopado com íons de cromo (Cr^{3+}), através energia luminosa emitida pelo tubo luminoso de quartzo. A luz do tubo excitava os átomos de cromo e estes liberavam fótons, representados pelas setinhas vermelhas, que percorriam todo o cilindro de alumínio. Devido ao processo de emissão estimulada, os fótons saíam com bastante intensidade através do espelho semi-refletor e assim gera-se o feixe do laser.

1.2 INTRODUÇÃO AOS LASERS ALEATÓRIOS E A ESTATÍSTICA

A partir da invenção do Laser, mais tarde, como conhecemos, veio a surgir grandes avanços devido aos interesses humanos e comerciais. O Laser é utilizado em leitores de discos, em comunicação e transmissão de dados, na Medicina, em invenções práticas como mouse, caneta laser, ou ainda, como é um de nossos focos neste trabalho, o laser que até então é chamado de laser convencional pode e foi utilizado para gerar um novo tipo de laser que é o Laser Aleatório (LA).

O Laser Aleatório, do inglês “Random Laser (RL)”, é um laser gerado num meio desordenado. Ao contrário dos lasers convencionais, ou lasers ordenados, que necessitam de uma cavidade óptica, o laser aleatório não depende disto. A proposta teórica deste tipo de laser surgiu em 1967 (LETOKHOV, 1967) no artigo intitulado “Stimulated Emission of an Ensemble

of Scattering Particles with Negative Absorption”, onde o autor fez uma interpretação da equação da difusão da física estatística para fótons num meio desordenado com ganho. Um meio desordenado pode ser entendido como um meio no qual estejam constituídas partículas aleatoriamente posicionadas, ou um meio cujo índice de refração linear muda aleatoriamente dentro do meio. Alguns anos após a publicação de Letokhov, em 1986, Markushev e colaboradores relataram a primeira demonstração experimental da geração de amplificação radiativa de luz num meio desordenado utilizando algumas amostras diferentes dopadas com íons trivalentes de neodímio (Nd^{3+}) (MARKUSHEV; ZOLIN; BRISKINA, 1986). O pressuposto de que esta seja a primeira demonstração experimental de um LA, apesar de ter sido mostrado um estreitamento espectral no limiar da transição $4F_{3/2} \rightarrow 4F_{11/2}$ como evidência de uma amplificação da luz, não foi bem aceita pois havia uma possibilidade de existir cavidades ressonantes dentro das partículas, sendo assim um laser não-aleatório, isto é, um laser ordenado. Alguns anos mais tarde, em 1994, Lawandy e colaboradores publicaram resultados interessantes (LAWANDY *et al.*, 1994) que, na verdade, seria a segunda vez que fora demonstrado a emissão laser num sistema desordenado. Esta é considerada a primeira demonstração experimental não-ambígua. Os autores prepararam soluções de etanol, Rodamina 640 e partículas de dióxido de titânio. Ao excitar a amostra com o laser de Nd:YAG em 532nm os autores mostraram um estreitamento espectral para a emissão do laser desordenado, que é uma das características fundamentais deste tipo de laser. Não só isso, mas uma outra importante característica é que o decaimento temporal das emissões encurta quando se aumenta o ganho fornecido, processo enfatizado no limiar de operação do laser.

Numa outra vertente de pesquisa dos lasers aleatórios, muitos cientistas estudam a analogia crescente entre fenômenos observados nos LA's e a estatística de sistemas complexos. Nesta perspectiva foi demonstrado por um trio de cientistas indianos (SHARMA; RAMACHANDRA; KUMAR, 2006) que existe, observando as flutuações das intensidades de saída dos lasers aleatórios, uma transição de regimes estatísticos aumentando o ganho do sistema. Mostraram que, para energias de excitação abaixo de um certo valor, a distribuição encontrada é gaussiana e para energias após um limiar existe a transição para o regime de Lévy. Mais uma vez, como ainda estamos na introdução, deixaremos uma parte deste trabalho para falar sobre as distribuições gaussiana e Lévy mais adiante. Após a publicação de Sharma e colaboradores, um outro grupo de cientistas italianos e um inglês (LEPRI *et al.*, 2007) mostraram teoricamente diferentes regimes dependentes de uma lei de potência onde, dependendo do valor do ganho, ocorreria os regimes gaussiano ou Lévy. O mesmo grupo, com

mais integrantes, em 2013, demonstrou tanto de forma teórica quanto experimental o que eles tinham discutido em 2007, uma transição gaussiana-Lévy-gaussiana para regimes estatísticos das flutuações de intensidades de saída dos lasers aleatórios (IGNESTI *et al.*, 2013). A observação teórica destes autores levou em conta um método que é chamado de Monte Carlo.

1.2.1 O Método de Monte Carlo

O Método de Monte Carlo (MMC) surgiu durante o contexto da segunda guerra mundial e leva este nome por referência ao Cassino de Monte Carlo, em Mônaco, devido à repetição e aleatoriedade nos jogos e atividades encontrados no lugar. O primeiro trabalho científico utilizando este método é creditado à Jon Von Neuman e Stanislaw Ulam, onde eles propuseram usar simulação computacional para certos problemas do projeto Manhattan.

No geral, podemos encarar tal método como uma técnica para representar a solução de um problema com parâmetros de uma população hipotética e, que usa uma sequência aleatória de números para construir uma amostra da população da qual estimativas estatísticas desse parâmetro possam ser obtidas, este conceito é descrito em (PAULA, 2014). Mais adiante mostraremos como utilizamos tal método para investigar as Flutuações de Intensidade dos Lasers (FIL).

No apêndice A está disponibilizado um código em python, escrito pelo autor deste trabalho, para um exercício sobre o método de Monte Carlo. O objetivo do exercício é mostrar como o método Monte Carlo pode resolver facilmente um dado exercício de forma simples. E um dos objetivos deste trabalho de conclusão de curso é mostrar como esse mesmo método resolve problemas mais avançados na física, como simular as FIL.

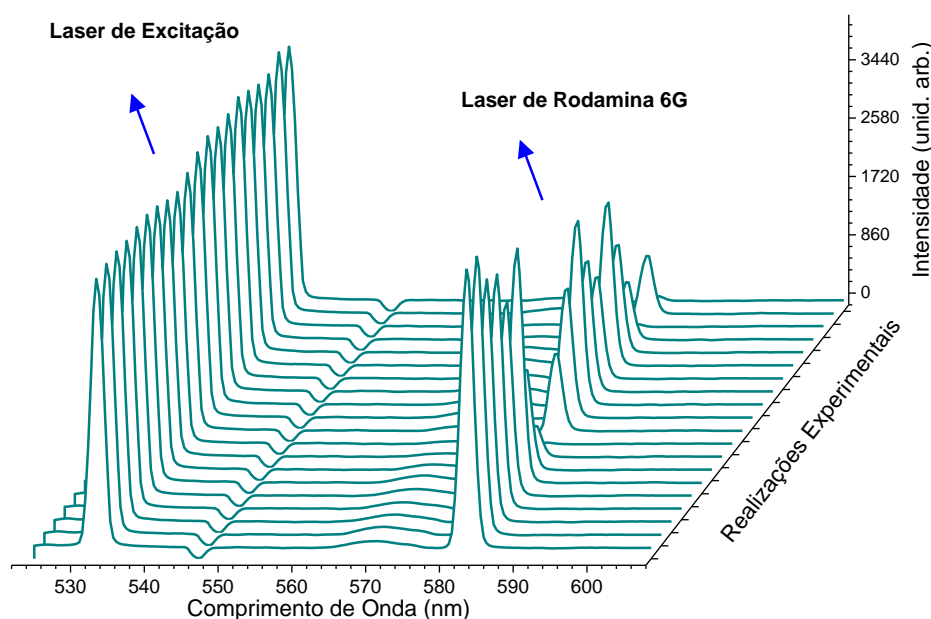
Introduzimos sobre estatística e sobre óptica até aqui pois nosso trabalho tem como foco estudar fenômenos ópticos experimentais via métodos estatísticos tais como Simulação de Monte Carlo.

1.3 O QUE SÃO FLUTUAÇÕES DE INTENSIDADE DOS LASERS (FIL)?

Como falaremos bastante das FIL em nosso trabalho, viemos neste tópico justificar o que elas são. O nome é bastante sugestivo, indica que estamos analisando vários espectros teóricos ou experimentais e observando as mudanças das intensidades entre um espectro e outro

consecutivo. Para visualizar melhor esta ideia fizemos experimentalmente, durante nossas atividades de iniciação científica, a figura 5 que mostra uma sequência de medidas com laser de excitação pulsado em 532nm e os espectros de saída de um laser baseado em Rodamina 6G.

Figura 5 – Observação dos espectros do laser de excitação e o laser de corante de Rodamina 6G.



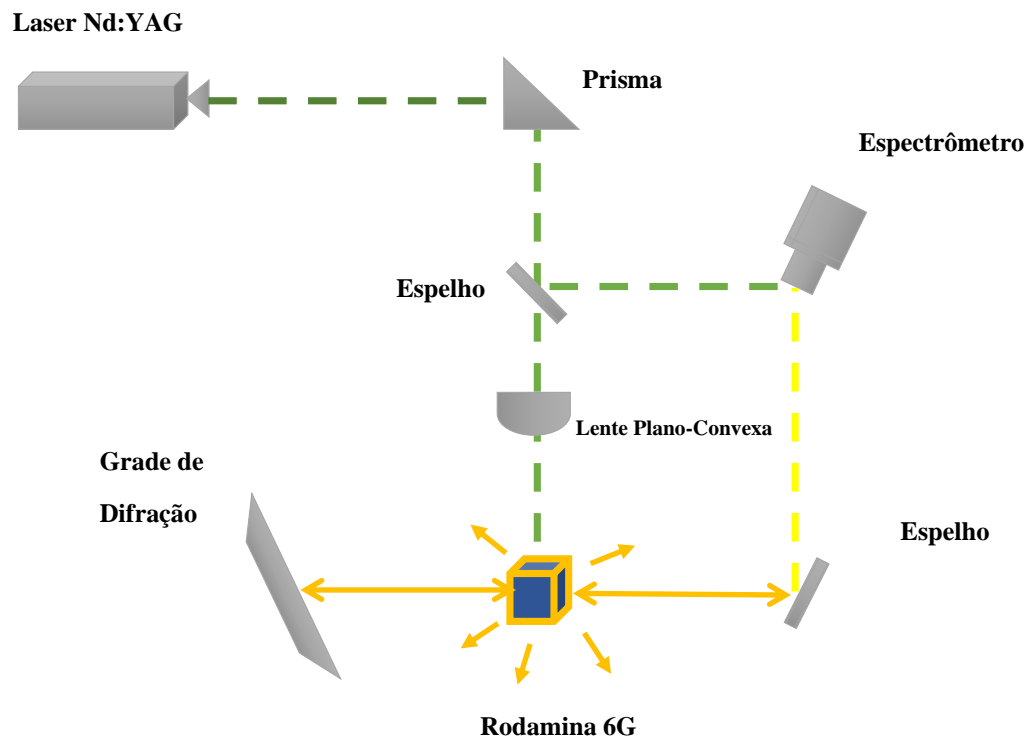
Fonte: O autor (2020).

Observa-se que as flutuações de intensidade, ou seja, o espectro entre uma realização e outra, não são distinguíveis para o laser de excitação, isto é, podemos dizer que não houve flutuação entre um espectro e outro do laser de excitação; porém ao laser de Rodamina 6G observa-se que entre um espectro e outro, as flutuações são notáveis. Vejamos agora como podemos reproduzir este gráfico de maneira simples para estudos iniciais.

A configuração experimental para realizar a comparação entre as flutuações do laser de excitação e o laser de corante (Rodamina 6G) está esquematizado na figura 6. Nossa fonte de excitação foi o Laser Nd:YAG Q-switched pulsado (~10 ns), onde cada pulso é uma realização experimental. O Laser é desviado por um prisma até um divisor de feixes, onde parte da luz atravessa e outra parte reflete até o espectrômetro, assim são captadas as intensidades do laser de excitação Nd:YAG. Esse formará o lado esquerdo da figura 5. O feixe que atravessa incide na Rodamina 6G (corante) excitando suas moléculas. Uma grade de difração forma uma cavidade óptica com um outro espelho e a luz emitida pela Rodamina é captada pelo

espectrômetro, formando o lado direito da figura 6, que são as FIL da nossa amostra.

Figura 6 – Configuração Experimental para observação das FIL.



Fonte: O autor (2020).

Neste contexto de flutuações de intensidades, muitos outros trabalhos foram desenvolvidos investigando os lasers aleatórios e estabelecendo relações ópticas, quânticas e estatísticas para eles e também para os lasers convencionais. Separamos tópicos deste trabalho de conclusão de curso (TCC) especialmente para tratar sobre os lasers convencionais e seus fundamentos e outro para tratar dos lasers aleatórios.

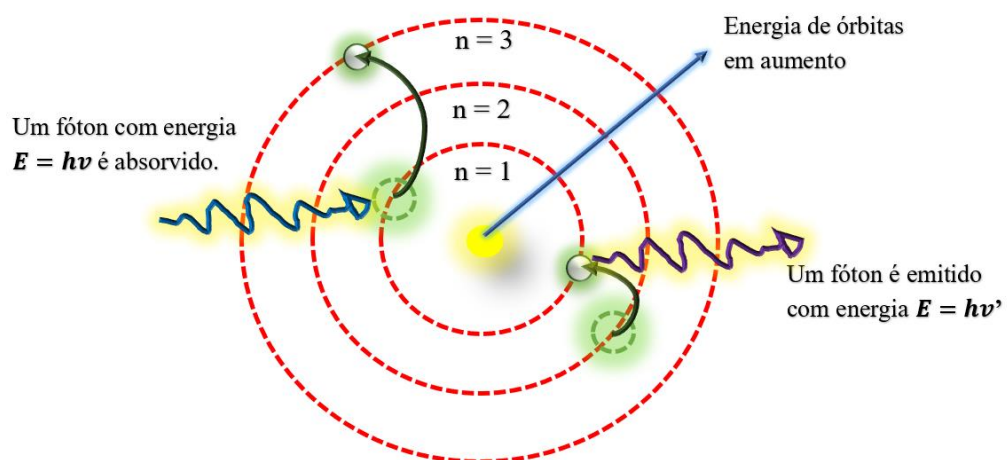
2 PROCESSOS ATÔMICOS E EXCITAÇÃO DE ÁTOMOS

Antes de falarmos diretamente sobre os lasers e nossas investigações, vamos dar abertura ao conteúdo tratando sobre alguns processos atômicos e a excitação de átomos. Isto se torna importante para compreendermos o princípio do laser. A partir do conteúdo tratado neste capítulo poderemos prosseguir com nossa discussão de forma mais clara. Revisamos alguns dos conceitos prévios para o entendimento da física do laser. A organização deste capítulo foi baseada no conteúdo das páginas 165-175 do livro “Introduction to the structure of matter: a course in modern physics” (BREHM; MULLIN, 1989).

Os processos atômicos que estamos interessados em discutir aqui são aqueles onde há uma interação entre a radiação e a matéria, tal como introduzimos nas figuras 1, 2 e 3, onde uma radiação, luz visível por exemplo, interage com um átomo.

Introduzimos sem muito rigor, no capítulo anterior, uma configuração de 2 níveis de energia para os processos de absorção e emissão (figs. 1-3), isto nos mostra que os níveis de energia atômico são quantizados, como previstos por Niels Bohr (BOHR, 1913). O modelo de representar processos atômicos através de níveis de energia aprimora a representação dada por Bohr (figura 7). O átomo de Bohr já tem sido suplantado pela mecânica quântica de Heisenberg e Schrödinger, no entanto vamos usá-lo para nossa discussão inicial uma vez que ele é uma boa porta de entrada ao mundo fascinante da estrutura da matéria (PARENTE; SANTOS; TORT, 2013).

Figura 7 – Modelo atômico de Bohr.



Fonte: O autor (2020).

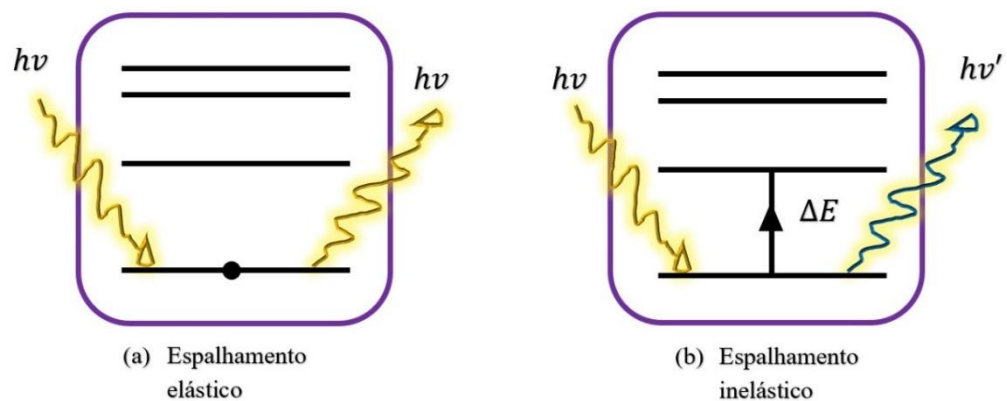
No modelo de Bohr existem as chamadas “camadas” que são representadas por órbitas circulares, quanto mais interna for a camada ($n = 1, 2, 3 \dots$) menos energética ela é. O modelo de Bohr descreve a interação da radiação com os elétrons (é importante lembrar que os níveis de energia não são dos elétrons, mas do átomo) tal que, se o elétron que se encontra numa camada mais interna – mais próxima do núcleo – absorver energia de uma radiação, como mostra na figura 7, este pode “saltar” para uma camada de maior energia, mais externa. O inverso também é válido, ou seja, se o elétron passar de uma camada mais externa para uma mais interna, este libera uma radiação cuja energia é dada pela equação de Planck ($E = h\nu$). Se essa energia for suficiente, o elétron pode ser arrancado, este é o caso do efeito fotoelétrico. Devido às limitações e falhas do modelo de Bohr, associadas ao princípio de incerteza de Heisenberg, representamos então os processos entre radiação e átomo através de níveis de energia, que são as linhas paralelas vistas nas figuras 1 à 3.

Semelhante ao modelo de Bohr, a primeira linha de baixo para cima representa o nível de menor energia, ou o estado fundamental do átomo. Subindo teremos os níveis subsequentes de maior energia, como na figura 8. Assim representaremos nas próximas seções e subseções.

2.1 ESPALHAMENTO ELÁSTICO E INELÁSTICO

Consideremos um sistema de 4 níveis, como na figura 8. O primeiro processo, que será importante para nosso desenvolvimento, chama-se “espalhamento elástico” (figura 8.a). Neste caso, mesmo com uma radiação incidente, o átomo permanece no estado fundamental e o fóton incidente sai do sistema com a mesma energia e frequência incidente. Este processo é também chamado de “espalhamento de Rayleigh”.

Figura 8 – Representação em níveis de energia para os espalhamentos elástico e inelástico.



Fonte: O autor (2020).

Num outro tipo de interação, o fóton por ter energia grande suficiente para causar uma transição do átomo para um estado excitado (figura 8.b). Com o átomo absorvendo parte da energia do fóton, haverá um “espalhamento inelástico” mudando a frequência do fóton incidente. Isto ficará claro se levarmos em consideração a conservação de energia:

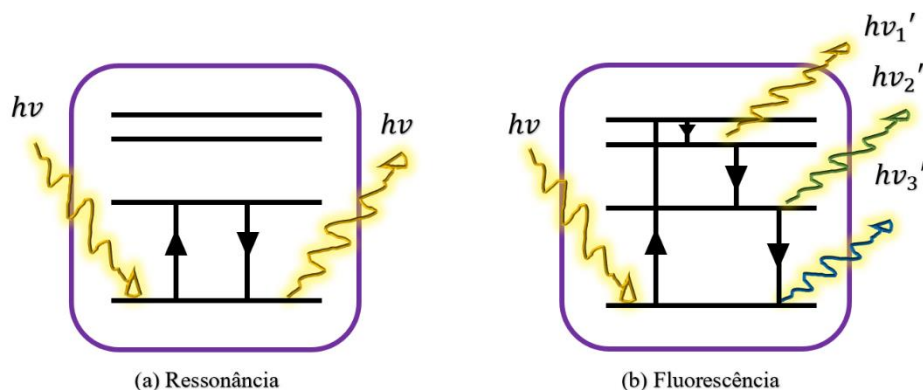
$$h\nu = \Delta E + h\nu' \quad (1)$$

Onde o lado esquerdo da equação 1 é a energia inicial do sistema, ou seja, do fóton incidente, e o lado direito é a energia final, isto é, a energia necessária para a transição atômica (ΔE) mais o “resto” que é a radiação espalhada com energia $h\nu'$. Este processo também pode ser denominado como “espalhamento Raman”.

2.2 RADIAÇÃO DE RESSONÂNCIA E FLUORESCÊNCIA

Pode ocorrer de que a energia do fóton incidente seja exatamente igual a energia de transição ($h\nu = \Delta E$) de dois níveis do nosso sistema. Então isto pode levar à absorção deste fóton levando o átomo para o estado excitado e em seguida a emissão do mesmo fóton quando o átomo retornar para o estado fundamental (figura 9.a). Esse fenômeno é um tipo de espalhamento elástico, uma vez que a frequência do fóton incidente é a mesma de saída; chamamos este processo de “radiação de ressonância”.

Figura 9 – Processos de Ressonância e Fluorescência.



Fonte: O autor (2020).

A figura 9.b mostra uma situação onde uma radiação com bastante energia é absorvida tal que leva o átomo para um nível de energia bem maior que o do estado fundamental. O que

irá ocorrer é que o átomo tenderá a retornar para o nível fundamental, podendo realizar várias transições durante seu trajeto, liberando assim, em cada decaimento, uma radiação com energias diferentes. Este fenômeno é chamado de “fluorescência”. Um bom exemplo ocorre quando um átomo absorve luz ultravioleta, que é uma radiação com muita energia se comparada às do espectro visível, e então a relaxação deste átomo pode emitir várias cores visíveis. Mais uma vez, levando em conta a conservação de energia, para a figura 9.d teremos:

$$h\nu = \sum_1^3 h\nu_i' \quad (2)$$

Este processo é um tipo de espalhamento inelástico.

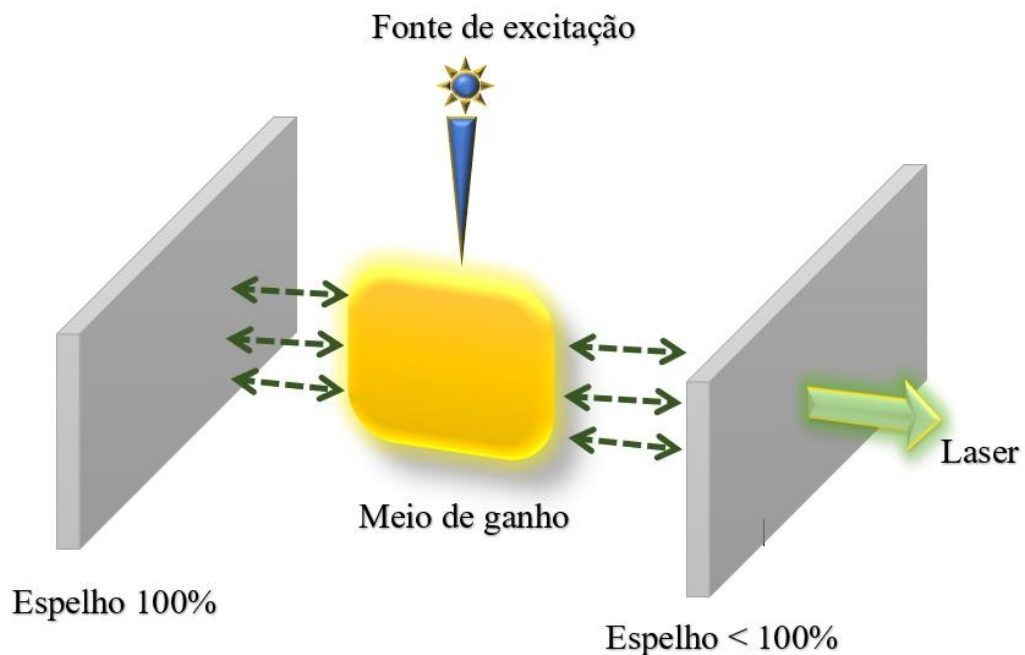
Com a revisão destes processos, facilitamos nossa compreensão do que vamos tratar a seguir que são as equações que foram levadas em conta para a invenção do primeiro laser. A cargo de curiosidade, outros processos atômicos comumente trabalhados nas disciplinas de “Física Moderna” e “Física Quântica” são “o efeito fotoelétrico” e “o efeito Compton”. Imagine para o primeiro, efeito fotoelétrico, um sistema semelhante à parte “b” da figura 9, mas agora o fóton incidente possui tanta energia que vai arrancar um elétron deste sistema. O mesmo para o efeito Compton, porém além de retirar o elétron, o fóton tem tanta energia que pode ser espalhado em outro comprimento de onda menos energético.

Todos os processos mencionados neste capítulo 2 podem ser encontrados ilustradamente na seguinte referência (BREHM; MULLIN, 1989).

3 O LASER

No capítulo 1 foi apresentado o primeiro laser inventado, porém atualmente existem muitos outros tipos de lasers mais eficientes. Uma representação esquemática dos lasers atuais, semelhante a figura 4, é disposta na figura 10.

Figura 10 – Laser convencional.



Fonte: O autor (2020).

Chamamos este de “laser convencional” e mais tarde, para nossa discussão, chamaremos este mesmo laser de “laser ordenado”. Os elementos essenciais dos lasers convencionais são: cavidade óptica, este é o conjunto dos espelhos sendo um deles parcialmente refletor; meio de ganho, aqui é onde a atividade de absorção e emissão acontecem; e fonte de excitação, dependendo do laser essa fonte pode ser uma diferença de potencial ou outra onda eletromagnética. A cavidade óptica proporciona os modos ópticos ressonantes e a fonte de excitação excita o meio de ganho. Uma das características para o meio de ganho é que ele seja altamente transparente à luz emitida, pois o espalhamento dessa radiação causa perdas no sistema.

Os processos descritos no capítulo anterior já eram conhecidos antes da chegada do Laser. Na verdade, houve uma outra invenção que antecedeu o laser: o MASER (amplificação de micro-ondas por emissão estimulada de radiação). Esta invenção levou ao prêmio Nobel de 1964 aos físicos Charles Townes, Nicolay Basov e Aleksandr Prokhorov. Não entraremos em

detalhes quanto ao MASER porém, já que citamos, há dois vídeos interessantes para saber mais sobre o maser, e também, para o acompanhamento deste capítulo cujas referências são (CEPOF & INCT ÓPTICA BÁSICA E APLICADA, 2019; PINHEIRO, 2019) dispostas no final deste trabalho.

3.1 OS COEFICIENTES DE EINSTEIN E AS EQUAÇÕES DE TAXA

Vamos considerar um sistema de dois níveis como nas figuras 1 à 3 para entendermos as equações dos processos de emissão espontânea, absorção e emissão estimulada.

- ABSORÇÃO

Considere um sistema inicialmente no estado fundamental onde uma radiação incide (figura 1). Vamos denotar este processo como " $R_{1 \rightarrow 2}$ ", isto é, o coeficiente de subida do sistema que se encontra no estado fundamental E_1 para o estado excitado E_2 que deve ser proporcional à um certo “coeficiente de absorção” e também proporcional a densidade de energia da radiação incidentem, tal que:

$$R_{1 \rightarrow 2} = B_{12}\rho(\nu), \quad (3)$$

onde B_{12} é o coeficiente de absorção e $\rho(\nu)$ é a densidade de energia da radiação incidente na frequência ν , oriunda da discussão do corpo negro realizada por Max Planck:

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \left(\frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \right), \quad (4)$$

onde h é a constante de Planck, c é a velocidade da onda eletromagnética, k é a constante de Boltzmann e T é a temperatura do sistema.

- EMISSÃO ESPONTÂNEA

Um átomo no estado excitado tende, espontaneamente, a voltar para seu estado fundamental. Isso é uma lei geral da natureza onde as coisas tendem a ficar em equilíbrio ou no estado de menor energia. Como vimos, se há uma relaxação para o estado fundamental, energia é emitida. Nesse caso não há interferência de alguma radiação incidente, como ocorre no processo

de emissão estimulada. Dessa forma vamos definir um coeficiente, assim como fizemos na equação 3, para a emissão espontânea, a qual denotaremos por:

$$A_{2 \rightarrow 1} = A_{21} . \quad (5)$$

O termo A_{21} é o coeficiente de emissão espontânea. Nome intuitivo já que estamos considerando que o sistema sai do estado 2 para o estado 1 espontaneamente. Como na figura 2.

- EMISSÃO ESTIMULADA E TAXA TOTAL DE EMISSÃO

Retornemos ao sistema no estado excitado. Como vimos na figura 3, se um fóton interage com um átomo no estado excitado, este retorna para o estado fundamental de forma que outro fóton idêntico é gerado. Vamos chamar o coeficiente de emissão estimulada de B_{21} . Ora, se uma densidade de energia é necessária para que haja a emissão estimulada, então, semelhante à equação 3, o processo de emissão estimulada será igual a $B_{21}\rho(\nu)$. Os coeficientes que definimos para a absorção e as emissões são chamados de “coeficientes de Einstein”.

Agora vamos escrever a equação para a relaxação, ou seja, considerando o sistema no estado excitado, a taxa de relaxação para o estado fundamental é:

$$R_{2 \rightarrow 1} = A_{21} + B_{21}\rho(\nu). \quad (6)$$

Essa taxa de relaxação $R_{2 \rightarrow 1}$ está relacionada com as emissões espontânea A_{21} e as emissões estimuladas $B_{21}\rho(\nu)$. Então podemos dizer que a equação 3 é a taxa de ocorrer a transição para o estado excitado, enquanto a equação 6 é a taxa de ocorrer a transição para o estado fundamental.

Essas equações são válidas para átomos, moléculas e íons.

- ANÁLISE DOS COEFICIENTES NO EQUILÍBRIO TÉRMICO

Uma consideração que podemos pensar, é que no equilíbrio térmico as taxas das equações 3 e 6 se igualam. Considerando uma certa quantidade de íons no estado fundamental n_1 e quantidade de íons que estão no estado excitado n_2 , teremos (3) e (6):

$$n_1[B_{12}\rho(\nu)] = n_2[A_{21} + B_{21}\rho(\nu)]. \quad (7)$$

Vamos a partir da equação 7 obter o valor da densidade de energia. Ao fazermos os passos matemáticos chegamos em:

$$\rho(\nu) = \frac{n_2 A_{21}}{n_1 B_{12} - n_2 B_{21}}. \quad (8)$$

Vamos dividir e multiplicar esta equação por $1/(n_2 B_{21})$, então simplificando temos:

$$\rho(\nu) = \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{n_1 B_{12}}{n_2 B_{21}} - 1}. \quad (9)$$

Se esse sistema está no equilíbrio térmico podemos usar a distribuição de Boltzmann para as populações n_1 e n_2 dada por:

$$n_2 = n_1 e^{-h\nu/kT}, \quad (10)$$

De tal forma que aplicando a equação 10 na equação 9 temos:

$$\rho(\nu) = \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{B_{12}}{B_{21}} e^{h\nu/kT} - 1} \quad (11)$$

Comparando as equações 4 e 11, conclui-se que:

$$\frac{B_{12}}{B_{21}} = 1. \quad (12)$$

Ou seja, no equilíbrio térmico, a absorção é igual a emissão estimulada. Lembrando que isso é para um sistema de dois níveis. A outra conclusão que tomamos comparando as equações 4 e 11 é:

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}, \quad (13)$$

ou,

$$A_{21} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} B_{21}. \quad (14)$$

Para a equação 14, nota-se que para altas frequências, como é o caso da luz visível e raios-x, o coeficiente de emissão espontânea A_{21} é maior que o da emissão estimulada B_{21} . Já na região do micro-ondas a frequência é menor fazendo com que $A_{21} < B_{21}$. Essa conclusão de que a emissão estimulada poderia ser maior que a emissão espontânea levou, primeiramente, a invenção do “MASER”, posteriormente, o surgimento do laser.

Com todo este raciocínio, podemos agora escrever equações de taxa de variação da população dos níveis excitado e fundamental:

$$\frac{dn_2}{dt} = B_{12}\rho(\nu)n_1 - [A_{21} + B_{21}\rho(\nu)]n_2; \quad (15)$$

$$\frac{dn_1}{dt} = -B_{12}\rho(\nu)n_1 + [A_{21} + B_{21}\rho(\nu)]n_2. \quad (16)$$

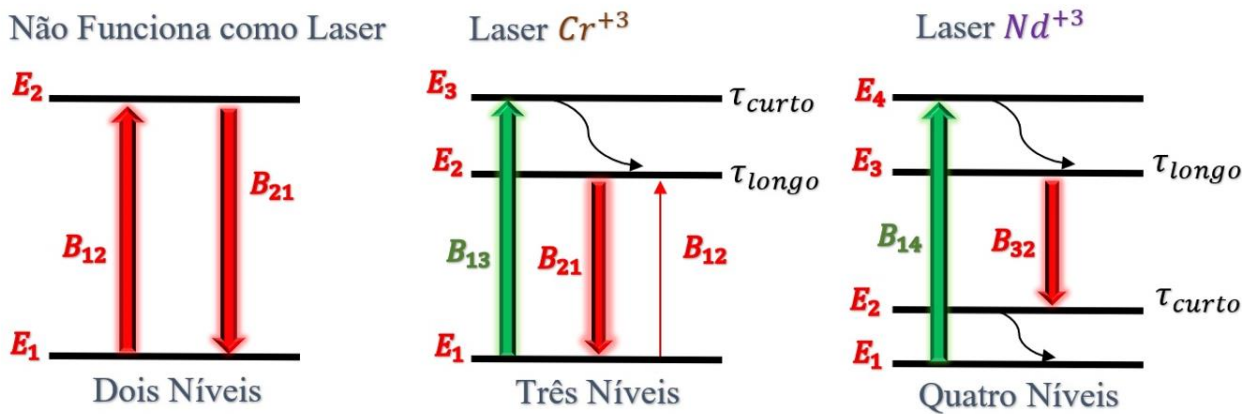
As equações 15 e 16 são equações de taxa acopladas que são uma interpretação da equação 7. A interpretação segue que a variação temporal da população do estado excitado ($\frac{dn_2}{dt}$) cresce de acordo com o coeficiente de absorção, afinal, se o sistema absorve energia, mais átomos irão popular o estado excitado (n_2); e decresce de acordo com as emissões espontânea e estimulada, por isso o sinal negativo na frente segundo termo à direita da equação 15. Então, é lógico que, se estamos num sistema de dois níveis, o que uma população perde, a outra ganha, e portanto, a equação 16 é similar a equação 15 trocando os sinais.

3.2 SISTEMAS DE 3 E 4 NÍVEIS

Introduzimos as equações para um sistema de 2 níveis, mas para conseguir amplificação num sistema de dois níveis é muito difícil porque deve-se ter um sistema com toda a população no estado excitado inicialmente, assim quando um fóton incidir sobre o sistema, a reação em cadeia é que o primeiro átomo relaxa de forma estimulada criando outro fóton que interage com o próximo átomo que relaxa criando mais um fóton e assim em diante. Vamos então discutir sobre um sistema de 3 ou 4 níveis para um laser funcionar.

A figura 11 mostra, em sequência, sistemas de 2, 3 e 4 níveis. Os coeficientes B_{ij} significam absorção, se $i < j$, ou emissão estimulada se $j > i$, no geral significa que está ocorrendo uma transição do estado i para j ou ao contrário. As setinhas curvadas de cor preta indicam um decaimento não-radiativo, ou seja, um decaimento espontâneo. Num sistema de 2 níveis, levando em consideração a equação 12, a absorção é igual ao decaimento por emissão estimulada, de forma que este tipo de sistema não serve como Laser. Já um sistema de 3 níveis, representado pelo desenho do meio da figura 11, é suficiente para gerar laser. De fato, o primeiro laser que citamos – o que foi inventado por T. H. Maiman – funciona com um sistema de 3 níveis, onde foi utilizado um rubi dopado com íons de cromo Cr^{+3} . E um sistema ainda mais eficiente foi mostrado utilizando íons de neodímio Nd^{+3} .

Figura 11 – Sistemas de 2, 3 e 4 níveis.



Fonte: O autor (2020).

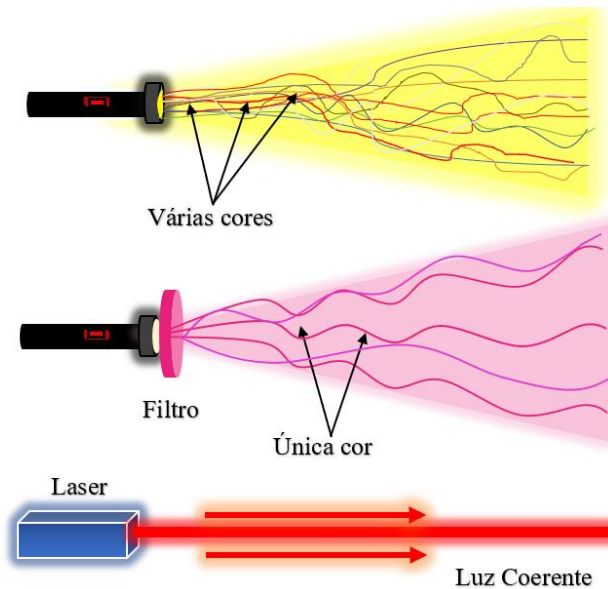
No sistema de 3 níveis, se um átomo é excitado para o nível 3 ele pode relaxar rapidamente para o nível 2, ou seja, o tempo de vida (τ) no nível 3 é curto, como representamos na figura 11, e do nível 2 para o nível 1 relaxa liberando um fóton que pode ser absorvido por outro átomo de um sistema e levar este novo átomo para o nível 2 ou invés do nível 3. Para minimizar o efeito da absorção e do relaxamento não-radioativo, já que o objetivo é amplificar a luz, propõe-se um sistema de 4 níveis, pois assim o nível 3 poderá ter um tempo de vida longo. Assim, foi encontrado nos íons de neodímio em seu estado trivalente, que este possui um sistema de 4 níveis. Assim, com a absorção, o átomo que é excitado até o nível 4, pode relaxar rapidamente para o nível 3, porém nesse nível o tempo de vida é longo (da ordem de $100 \mu s$) facilitando o decaimento estimulado para o nível dois. Estando no nível 2, pode ocorrer uma relaxação rápida ($\ll 1 \mu s$) para o nível 1, evitando assim uma nova absorção neste nível. Esse sistema é mais

eficiente que o de 3 níveis. Um vídeo interessante para mostrar o funcionamento e a engenharia de um laser de neodímio está disponível na plataforma do youtube cuja referência é (QPAGE, 2014).

3.3 O QUE DIFERENCIA O LASER DE OUTRAS FONTES DE LUZ?

Não é difícil encontrar ao nosso redor sistemas de iluminação – estrelas, vagalumes, lanternas, lâmpadas, postes, refletores, lasers – e que, para algumas pessoas, estar diante de um sistema de iluminação faz parte do trabalho diário. Uma fonte de luz que emite várias cores onde comumente vemos a cor “branca”, o que já tinha sido discutido por Isaac Newton em sua teoria das cores primeiro publicada numa revista da Royal Society e aprimorada na sua obra “Opticks”, é facilmente encontrada em lanternas ou lâmpadas de tungstênio. A lanterna que emite luz branca possui ondas eletromagnéticas de todos os comprimentos de onda que não estão em fase entre si, uma vez que não há nenhum mecanismo para sincronizar os campos eletromagnéticos e fazê-los ficarem coerentes.

Figura 12 – Diferenças entre luz poli, monocromática e o laser.



Fonte: O autor (2020).

Na mesma lanterna podemos acoplar um filtro que permite a passagem de apenas um comprimento de onda tal que teremos uma luz monocromática. Essa luz ainda não é coerente pelo mesmo argumento de que não existe nenhum mecanismo de sincronização. Por outro lado, o laser, devido aos processos anteriormente discutidos, é formado por vários fótons que foram

estimulados por um fóton que foi responsável pelo decaimento radioativo. A cavidade faz com que a realimentação crie fótons idênticos e as ondas eletromagnéticas correspondentes ficam em fase, por isso a luz laser é dita coerente. Outra vantagem do laser é que o feixe é direcional facilitando a focalização.

A partir de muitos trabalhos desenvolvidos após a invenção do laser, um campo novo se abriu na ciência, chamado “óptica não-linear” com a demonstração experimental da geração de um segundo harmônico (FRANKEN, 1961). A geração do segundo harmônico (SH) é um fenômeno que ocorre devido a propriedades fundamentais de alguns materiais. Quando um feixe incide em um material gerador de SH, o feixe de saída passa a ter o dobro da frequência do feixe incidente, equivalente a metade do comprimento de onda. Um trabalho interessante que resume bem sobre este tipo de fenômeno foi desenvolvido por uma estudante de iniciação científica da Universidade Federal de Alagoas (MARQUES, 2018).

Numa outra vertente, estudos se ampliam no campo dos lasers aleatório, como temos os introduzido anteriormente no primeiro capítulo. Os lasers aleatórios têm atraído bastante atenção da comunidade científica e diversos trabalhos têm sido desenvolvidos utilizando os lasers aleatórios. No contexto computacional, os lasers aleatórios são comumente investigados através de simulações de Monte Carlo, isto porque os fótons para gerar um laser aleatório se comportam, dentro de um meio espalhador, como caminhantes aleatórios e passamos a descrever a difusão dos fótons com equações estatísticas. Será abordado posteriormente com mais detalhes o fenômeno do laser aleatório, assim como abordamos os lasers ordenados nesse capítulo.

Antes de tratar sobre os lasers aleatórios, onde serão necessários alguns conceitos estatísticos, vamos introduzir um pouco deste conhecimento no próximo capítulo. Assim, trataremos das nossas investigações sobre as FIL tanto em sistemas desordenados (laser aleatório) quanto em sistemas ordenados (laser convencional).

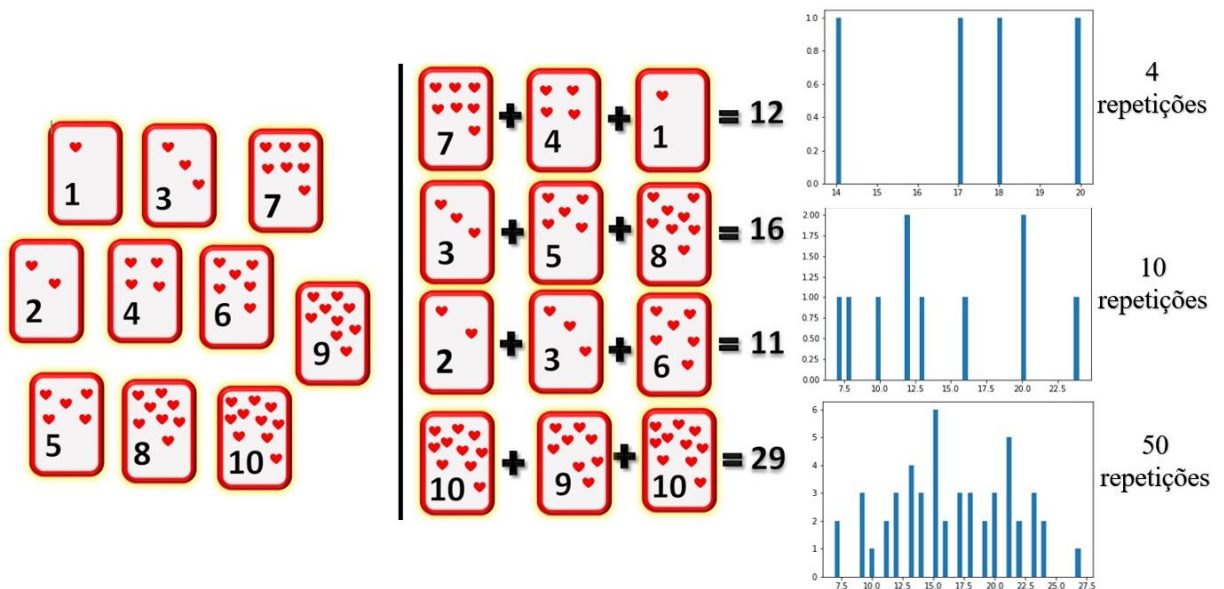
4 ESTATÍSTICA E SIMULAÇÕES DE MONTE CARLO

Este capítulo trata de alguns fenômenos da Mecânica Estatística os quais usaremos para abordar as análises das FIL posteriormente. Usaremos o método de Monte Carlo para as figuras deste capítulo.

4.1 TEOREMA CENTRAL DO LIMITE (TCL)

Este teorema pode ser facilmente compreendido usando alguma linguagem de programação (nós usamos Python, Fortran e C). Considere um baralho com 10 cartas com os valores de 1 a 10, sendo cada valor em uma carta. Pegue, sem ver, isto é, aleatoriamente, uma carta. Veja o valor, devolva e embaralhe. Pegue outra carta, veja o valor, devolva e embaralhe. Faça isso três vezes e some os valores. Guarde esse valor da soma. Repita esse algoritmo 4, 10 e 50 vezes e faça o histograma das somas. Você verá histogramas aleatórios para cada vez que o fizer. Como mostramos na figura 13. Note que quanto mais repetições fazemos, mais valores aparecerão no histograma.

Figura 13 – Histograma das somas de valores aleatórios.

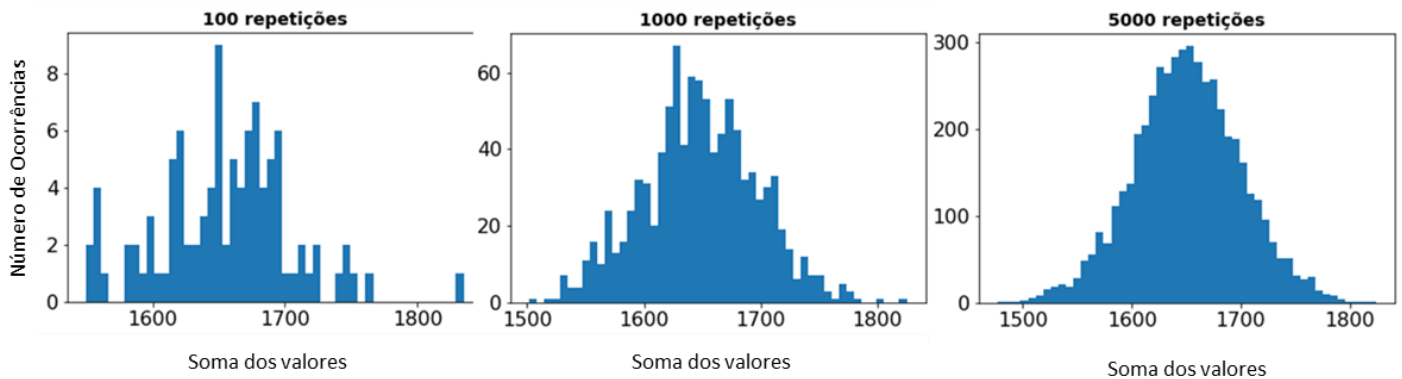


Fonte: O autor (2020).

Agora, antes de nos surpreendermos, vamos ao enunciado do Teorema Central do Limite: “a soma de variáveis aleatórias independentes, com variância finita, tende a uma distribuição normal para um número suficientemente grande de somas”. Propomos então um novo teste.

Vamos aumentar os números. Faça o mesmo algoritmo de antes, mas dessa vez com 100, 1000, 5000 vezes e veja a resposta. Podemos também, ao invés de somar 3 valores, somar muito mais, porém isso não é necessário. Fazendo isto conseguimos reproduzir a distribuição normal garantida pelo teorema central do limite. Nossos resultados estão dispostos na figura 14.

Figura 14 – Teorema central do limite para 100, 1000 e 5000 repetições do algoritmo.



Fonte: O autor (2020).

A distribuição normal, ou também chamada de distribuição gaussiana, tem a seguinte equação:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right], x \in (-\infty, \infty) \quad (17)$$

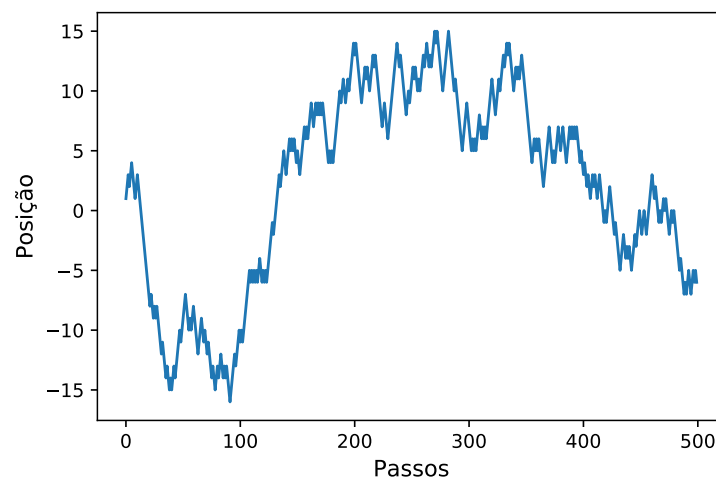
Onde x é a variável, σ é a largura na metade da altura da distribuição normal (variância) e μ é o centro da gaussiana (valor médio). Essa equação está normalizada, o que significa que a integral sobre todo o espaço amostral é igual a 1. Isto indica que a soma de todas as probabilidades de cada medida deve ser 100%. De fato, se somarmos as probabilidades de pegar uma carta do nosso baralho, que é 1/10 para cada carta, contendo 10 cartas, essa soma será equivalente a seguinte multiplicação: $10 \times (1/10) = 1$.

O Teorema central do limite é utilizado em muitos campos da ciência como na economia, física, matemática, biologia, etc. A distribuição gaussiana ocorre em diversos fenômenos e, neste trabalho, ela começará a aparecer com frequência a partir daqui.

4.2 O CAMINHANTE ALEATÓRIO

Imagine um caminhante bêbado em um vasto campo aberto onde ele pode dar passos em todas as direções. Geralmente um bêbado não tem coordenação motora suficiente para controlar sua caminhada de forma que os passos não são previsíveis. Esse bêbado após muitos passos fará o que chamamos de “passeio aleatório”. Para mostrar essa ideia, vamos primeiro imaginar o caso unidimensional. Este mesmo caminhante está sobre uma reta no eixo x e ele só pode dar passos para direita ou para esquerda com probabilidade de 50% para cada opção. Um algoritmo para simular essa caminhada não deve ser difícil para uma linguagem de programação. Usamos o MMC mais uma vez para simular essa caminhada, onde consideramos um caminhante que andou 500 passos e a cada passo ele anda uma casa (positivo, para direita; negativo, para esquerda). O resultado está disposto na figura 15.

Figura 15 – Caminhante aleatório unidimensional.

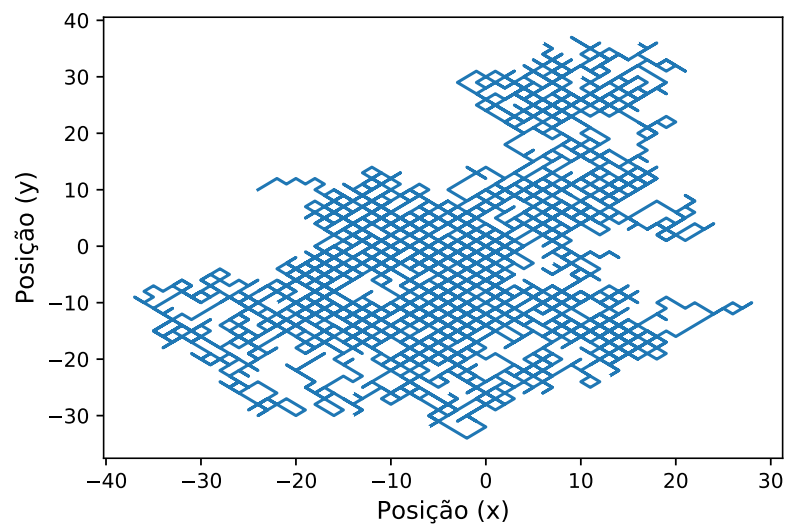


Fonte: O autor (2020).

O caminhante começa da posição $x(0)=0$. A figura 15 mostra a trajetória dos passos, ora para direita, ora para esquerda. Nota-se uma aleatoriedade na trajetória desse passeio.

Para fazer isto em 2 dimensões teremos um algoritmo semelhante, porém, dessa vez, existe as possibilidades do caminhante se locomover nas coordenadas (x,y) , onde x e y podem assumir os valores $(-1,1)$. Utilizando o MMC conseguimos plotar o gráfico deste passeio disposto na figura 16.

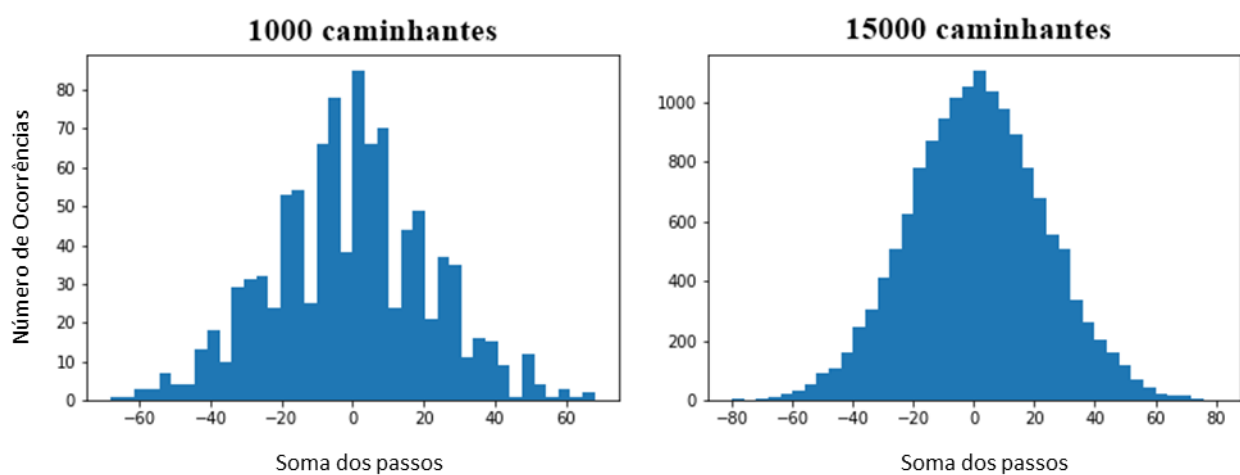
Figura 16 – Caminhante aleatório bidimensional com 5000 passos.



Fonte: O autor (2020).

Agora fazemos esse mesmo problema para um outro caminhante, depois outro, depois outro, ou seja, fazer isto muitas vezes. Porém, a cada caminhante, somamos os passos e guardamos os valores. Basta nos surpreendemos agora fazendo o histograma dessas somas, como segue na figura 17. Assim, mais uma vez mostramos o poder do TCL.

Figura 17 – Histograma do passeio aleatório.



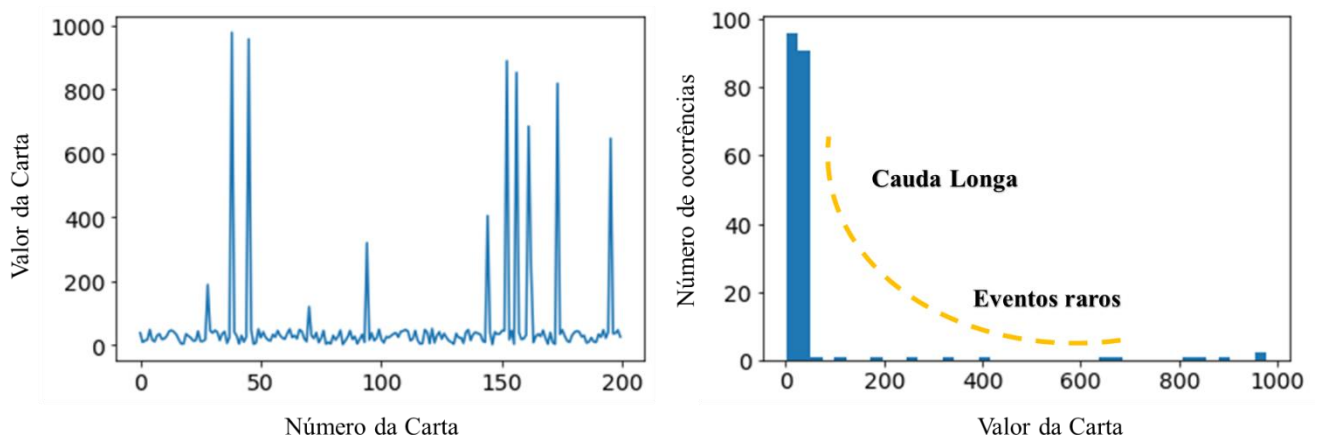
Fonte: O autor (2020).

Agora vamos quebrar o teorema central do limite, fazendo um problema especial onde a distribuição de probabilidades não é igual para todas as possibilidades.

4.3 EVENTOS RAROS, CAUDA LONGA E VOOS DE LÉVY

Considere um baralho como da figura 13, porém, dessa vez, existem cartas com valores bem maiores do que 1 a 10, como 500 ou 1000. Imagine um baralho hipotético onde fosse muito mais difícil retirar uma carta com valor alto do que retirar uma com valor baixo. Um algoritmo interessante que propomos para essa ideia é: sortear 200 números aleatoriamente cujo valor de cada número está entre 1 e 1000; os valores entre 1 e 50 possuem uma probabilidade alta de ocorrer (usamos 95% para o resultado da figura 18); os valores entre 50 e 1000 possuem o complemento para 100% de probabilidade de ocorrer (no nosso caso, 5%).

Figura 18 – Eventos raros e cauda longa.



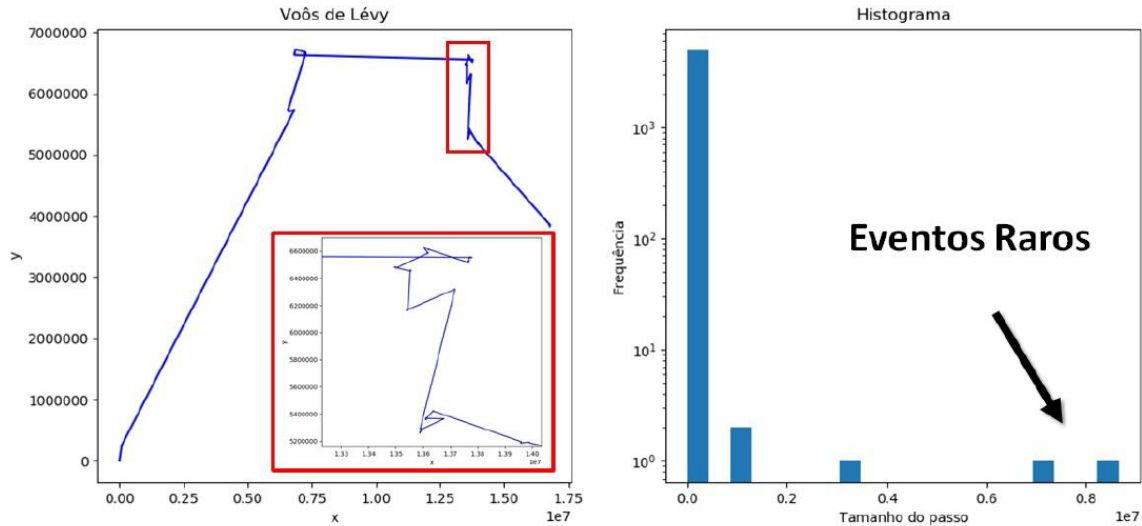
Fonte: O autor (2020).

Observa-se que, como os números mais altos são mais difíceis de se obter, eles aparecem poucas vezes (lado esquerdo da figura 18), e o histograma nos mostra o que parece ser uma cauda longa com muita ocorrência dos valores pequenos e os nossos eventos raros que são os números grandes. Chamaremos, futuramente, esses grandes picos de “spikes”. Essa cauda longa é uma das características da distribuição de Lévy, a qual iremos tratar a seguir.

Agora, mais uma situação para imaginar: uma ave que procura alimentos, quando chega numa região onde há bastante alimentos fica por lá até se satisfazer ou não haver mais alimento. Feito isso, essa ave tende a ir para um outro lugar distante dali onde terá alimentos novamente.

Isto é como imaginar um caminhante aleatório, mas dessa vez chamaremos de “caminhante de Lévy” ou “Voos de Lévy. Simulações foram feitas para a figura 19.

Figura 19 – Voos de Lévy.



Fonte: Rocha (2019).

O lado esquerdo da figura 19 representa a caminhada (ou voos) em duas dimensões do pássaro. Nota-se que em muitos momentos, como é o caso da região demarcada em vermelho, o pássaro dá pequenos voos. Porém, em outros momentos esse voo é muito longo, o que significaria que ele foi em busca de alimento em outro lugar distante. No lado direito da figura 19 temos o histograma do tamanho dos passos. Com isso concluímos que os passos grandes são nossos eventos raros e o histograma fornece, mais uma vez, uma cauda longa.

4.4 A DISTRIBUIÇÃO DE LÉVY

Paul Lévy foi um matemático francês que dedicou-se a estudar processos probabilísticos e estocásticos. Um de seus legados mais importantes foi a generalização do teorema central do limite, mostrando que a distribuição normal é um caso especial da distribuição α –estável, ou, “distribuição de Lévy”:

$$\varphi(t) = \exp\{it\mu - |ct|^\alpha[1 - i\beta\text{sgn}(t)\Phi]\} \quad (18)$$

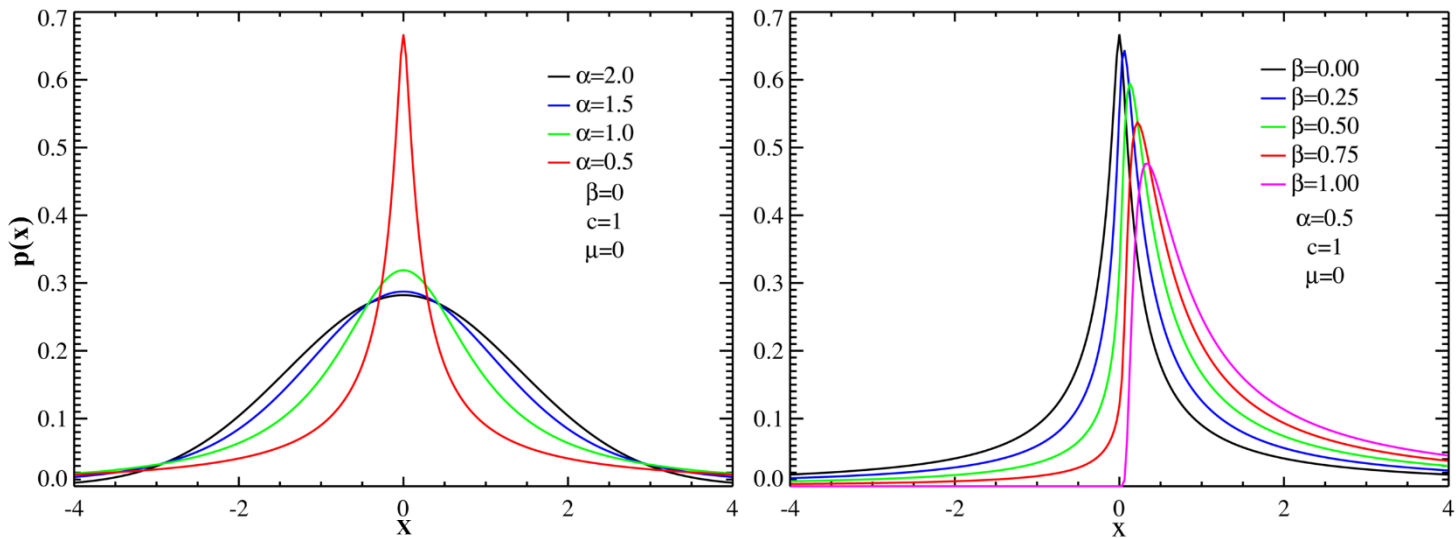
Onde,

$$\Phi = \begin{cases} \tan\left[\frac{\alpha\pi}{2}\right], & \text{para } \alpha \neq 1 \\ -(2\pi)\ln|t|, & \text{para } \alpha = 1 \end{cases} \quad (19)$$

Na equação 18, $\varphi(t)$ é uma função característica cuja transformada de Fourier pode ser consultada em (Wikipedia, 2020), i é a raiz quadrada de menos 1, $\mu \in \mathbb{R}$ é o parâmetro de deslocamento da função, $c > 0$ é a largura da distribuição, $\alpha \in (0,2]$ é o parâmetro responsável pela variação das distribuições e pode ser chamado de “expoente de Lévy”, $\beta \in [-1,1]$ é o parâmetro de assimetria e sgn é o sinal de t .

Na figura 20 é representado a distribuição de Lévy para diferentes parâmetros onde $p(x)$ é a densidade de probabilidade da distribuição de Lévy.

Figura 20 – Densidade de probabilidade da distribuição de Lévy.



Fonte: STABLE... (20--).

A depender dos parâmetros escolhidos, podemos encontrar uma lei de potência nesta distribuição, ou ainda, casos especiais como a distribuição de Cauchy ou a Gaussiana.

5 EQUAÇÕES DE TAXA ACOPLADAS NA FORMA COMPLETA

A partir deste capítulo trataremos, com base em tudo o que tem sido discutido até então, as equações de taxa que descrevem muito bem o regime de qualquer agente emissor, como é o caso de um laser. Podemos interpretar como uma otimização das equações 15 e 16 mostradas anteriormente. O capítulo anterior junto com este será importante para entender o desenvolvimento final deste trabalho.

Trabalhos experimentais como (NOGINOV *et al.*, 1996; MOURA *et al.*, 2015) mostraram que a relaxação de emissores, compostos de íons de neodímio e outros elementos, são excelentes para a geração de amplificação de luz. A relaxação espontânea, discutido anteriormente, tem uma equação semelhante à de uma descarga típica do circuito RC:

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{n}{\tau_1}. \quad (20)$$

Esta equação possui a solução conhecida em forma de exponencial:

$$n(t) = n_0 e^{-t/\tau_1}, \quad (21)$$

onde n é a densidade de átomos no estado excitado, cujo valor inicial é n_0 . A constante τ_1 é o tempo de vida do estado excitado. O decaimento temporal dessa densidade pode ocasionar a emissão dos fótons.

A equação que leva em conta o pulso de excitação de uma fonte externa (como um laser) e o processo de emissão estimulada é dada em (NOGINOV *et al.*, 1996):

$$\frac{dn}{dt} = \frac{K(t)N\sigma_{abs}}{h\nu_{pump}} - \frac{n}{\tau_1} - \beta nN - \frac{E}{h\nu_{em}} c\sigma_{em}n. \quad (22)$$

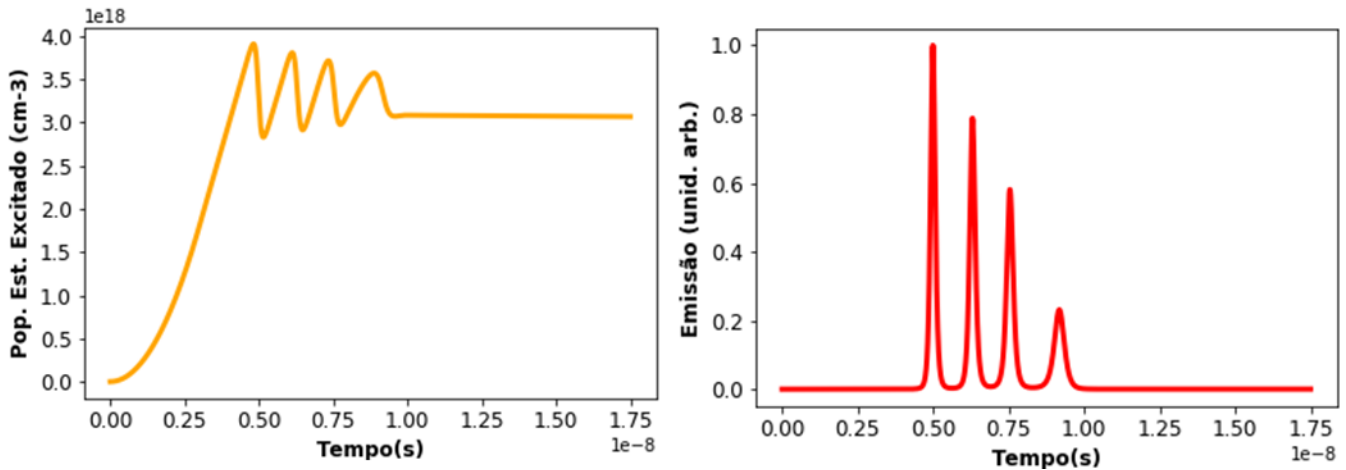
E também, a taxa da densidade da energia emitida na transição do laser:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{E}{\tau_2} + \frac{n}{\tau_1} h\nu_{em} + Ec\sigma_{em}n. \quad (23)$$

Aqui $K(t)$ é a densidade temporal de energia da fonte de bombeamento, N é a densidade de íons no estado fundamental, σ_{abs} é a seção de choque de absorção no comprimento de onda do bombeamento, $h\nu_{pump}$ é a energia por fóton com frequência ν_{pump} do bombeamento, βnN é a taxa de relaxação cruzada que leva a relaxações não-radiativas dos átomos, c é a velocidade da luz, σ_{em} é a seção de choque na frequência da emissão estimulada ν_{em} , assim como $h\nu_{em}$ é a energia do fóton no comprimento de onda da emissão estimulada e τ_2 é o tempo médio que os fótons permanecem no sistema.

Para encontrar as soluções de n e de E com as equações 22 e 23 usamos métodos computacionais nas linguagens Fortran, C e Python. Considerando os dados do artigo mencionado acima (NOGINOV *et al.*, 1996) simulamos os seguintes resultados:

Figura 21 – Soluções das equações de taxa acopladas 22 e 23.



Fonte: O autor (2020).

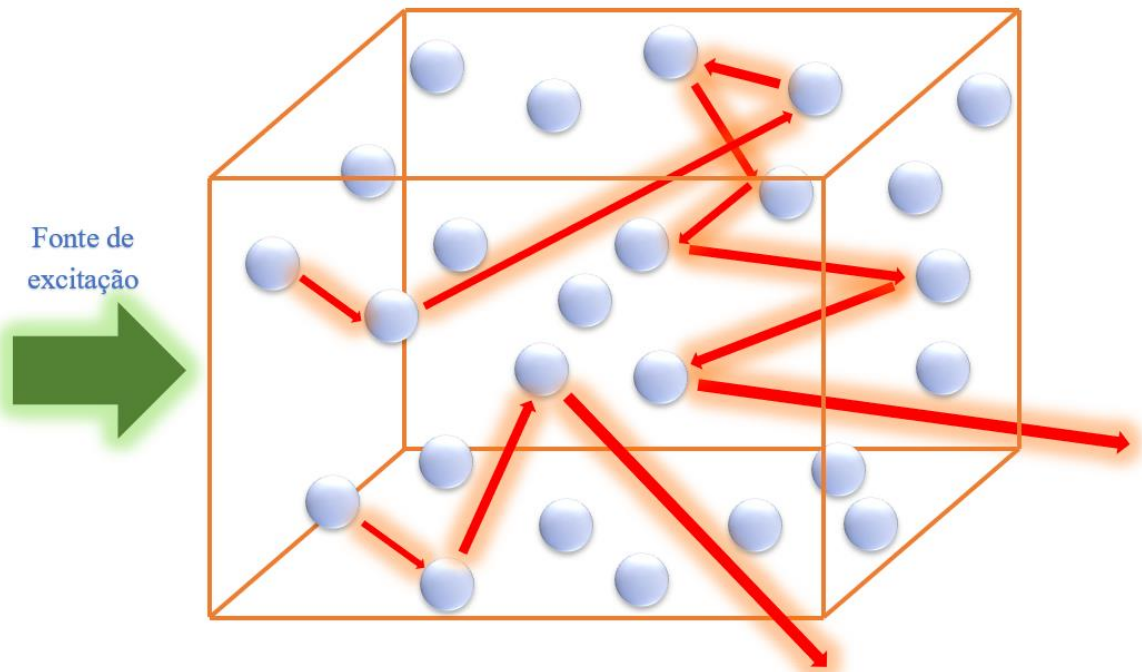
O bombeamento $K(t)$ pode ser considerado como um pulso gaussiano (ROCHA *et al.*, 2019) para obter as soluções das equações 22 e 23, porém, adaptamos este pulso para um pulso triangular para obter a figura 21 (código no apêndice A). Então obtivemos resultados similares para um bombeamento gaussiano, bombeamento triangular e em forma de trapézio. Isto desde que as condições iniciais fossem mantidas.

A análise destas equações serve tanto para lasers aleatórios, quanto para lasers convencionais. No caso de um laser convencional, τ_2 está associado à refletividade dos espelhos. Já nos lasers aleatórios à difusão dos fótons. Discutiremos mais a frente sobre isto.

6 O LASER ALEATÓRIO (LA)

O LA, que introduzimos na seção 1.2, é um tipo especial de laser. Neste, a proposta é que haja emissão do tipo laser em sistemas desordenados (MARKUSHEV; ZOLIN; BRISKINA, 1986; LAWANDY et al., 1994). Há uma matéria interessante para compreender as diferenças básicas entre um laser convencional e um laser aleatório. Disponível em: <https://revista-pesquisa.fapesp.br/2016/09/23/um-laser-nada-convencional/>. Acesso em: 22 mar. 2020. Como representado no link, temos um laser convencional que descrevemos outrora na figura 10, e abaixo temos a representação de um laser aleatório. O Laser aleatório não utiliza espelhos, como um laser convencional. Para gerá-lo podemos deixar uma fonte externa de excitação, como um laser convencional, incidir sobre um meio com partículas dispersoras e amplificadoras. O que acontece é que o laser de excitação estimula as partículas do meio espalhador e as emissões saem em direções aleatórias. A trajetória aleatória dos fótons dentro do meio pode ser entendida como um processo de caminhadas aleatórias num meio difuso ou “superdifuso” (TOMMASI *et al.*, 2019). Representamos na figura 22 como pode ser produzido um laser aleatório, onde consideramos um meio tridimensional.

Figura 22 – Laser produzido num meio desordenado.



Fonte: O autor (2020).

Nesse processo existem caminhanthes (fótons) cujas intensidades são mais amplificadas que de outros, pois uma vez que o meio é difuso, os fótons podem rapidamente sair da amostra ou permanecer nela por muito tempo enquanto visita várias células. Os fótons que passam mais tempo dentro da amostra, são mais amplificados já que visitaram muitas células para estimulá-las e assim podemos chamá-los de “lucky photons” (IGNESTI *et al.*, 2013; MUJUMDAR *et al.*, 2004), ou fótons sortudos. Os espectros de saída deste tipo de laser poderão gerar grandes picos, ou “spikes”, dependendo do ganho fornecido e das condições iniciais. Isto seria algo semelhante à nossa figura 18.

Uma comparação que podemos tomar entre os lasers convencionais e os aleatórios é que, no primeiro as ondulações da luz são ordenadas e adquirem um comportamento muito bem organizado devido sua coerência; já no segundo, a radiação oscila de maneira desordenada e a cada pulso disparado, sua intensidade varia ao acaso.

Algumas das aplicações para os lasers aleatórios são mostradas pelo professor Dr. Cid B. Araújo em um colóquio do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Física da Universidade Federal Rural de Pernambuco. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=qKR6_1pCICo&ab_channel=PPENGFIS. Acesso em: 01 jan. 2021. Estes lasers são investigados por pesquisadores de todo o mundo utilizando coloides, pó, gás, membranas, chips e fibras ópticas.

6.1 REGIMES ESTATÍSTICOS PARA AS FLUTUAÇÕES DE INTENSIDADE DOS LASERS ALEATÓRIOS

Trabalhos experimentais (MARKUSHEV; BRISKINA; ZOLIN, 1986; LAWANDY *et al.*, 1994; NOGINOV *et al.*, 1996; CAO *et al.*, 1999) têm demonstrado diversos aspectos sobre as intensidades de saída dos lasers em sistemas desordenados como o estreitamento espectral, inclinação da reta da emissão em função da intensidade de excitação, os spikes e a competição dos modos ópticos.

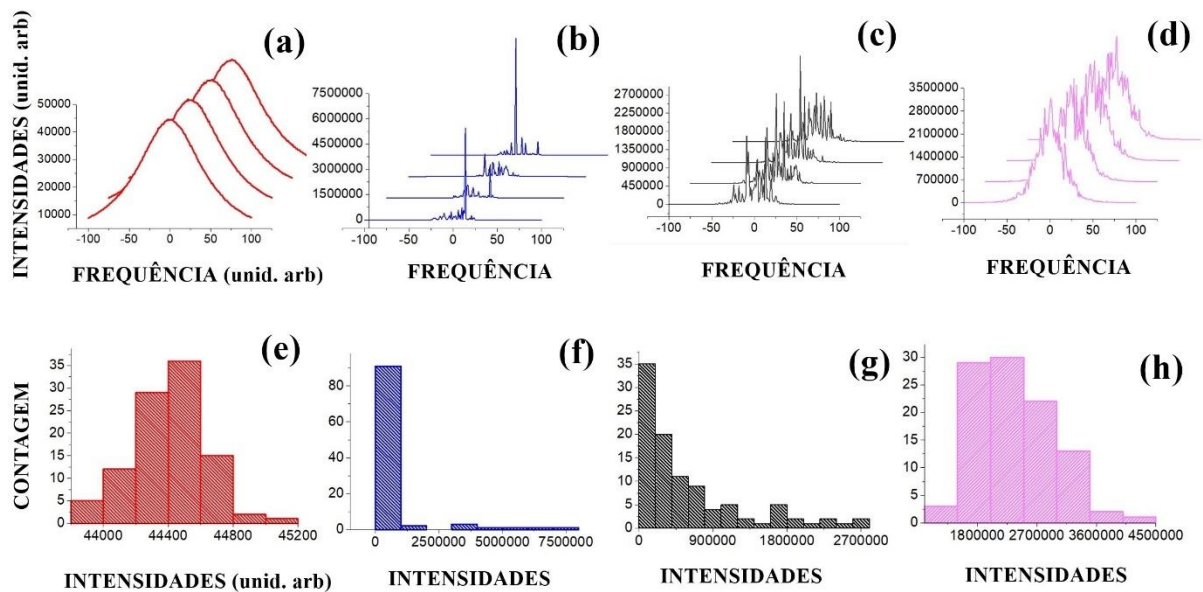
Um dos fenômenos bastante investigado sobre os lasers aleatórios são as flutuações de intensidade de saída. Este fenômeno tem sido investigado estatisticamente e relatado que existe uma transição de regimes estatísticos para diferentes ganhos num meio difuso (IGNESTI *et al.*, 2013). Segundo os autores, existe uma transição de regimes Gaussiano-Lévy-Gaussiano para as FIL aleatórios de acordo com o aumento do ganho disponível. O ganho que é responsável por começar a gerar as grandes flutuações e os spikes no espectro é chamado de “threshold”,

ou “limiar”. Eles mostraram que para um ganho abaixo do limiar, a distribuição encontrada é gaussiana, para um ganho nas redondezas do limiar a distribuição oferta uma cauda longa, característica da distribuição de Lévy. Por fim, para um ganho acima do limiar, retorna-se uma distribuição aproximadamente gaussiana. Recentemente, pesquisadores tem considerado a distribuição de Izrailev para um ganho muito acima do limiar (GÓNZALES *et al.*, 2020).

Realizamos algumas simulações de Monte Carlo considerando o modelo numérico descrito no artigo acima mencionado. Consideramos uma rede unidimensional e mostramos numericamente que a transição ocorre, também, em uma dimensão, como foi feito experimentalmente em (LIMA *et al.*, 2017). Nosso modelo numérico foi desenvolvido considerando um meio amplificador constituído de um sistema de 4 níveis de energia. O algoritmo considera uma rede de tamanho L no qual os fótons, também chamados de caminhantes, são criados com uma frequência inicial e energia inicial. O “loop” do algoritmo que descreve a difusão dos fótons foi baseado em (IGNESTI *et al.*, 2013), onde os autores consideraram um meio bidimensional.

Na figura 23 estão representadas nossas simulações para as flutuações de intensidade de emissão dos lasers aleatórios, considerando um caso unidimensional. Da esquerda para a direita, na linha superior da figura 23 temos realizações numéricas a cada espectro para: (a) ganho = $1,0 \times 10^6$ unid. arb.; (b) ganho = $2,5 \times 10^6$ unid. arb.; (c) ganho = $4,0 \times 10^6$ unid. arb.; (d) ganho = $10,0 \times 10^6$ unid. arb.; cujos respectivos histogramas nos mostram a transição de regimes: (e) Gaussiano; (f) Lévy; (g) Lévy; (h) aproximadamente gaussiano.

Figura 23 – Transição de regimes estatísticos em lasers aleatórios.



Fonte: O autor (2020).

Notavelmente nas regiões em que aparecem os spikes, as flutuações entre um espectro e outro são grandes, enquanto que no regime gaussiano quase não se nota as flutuações.

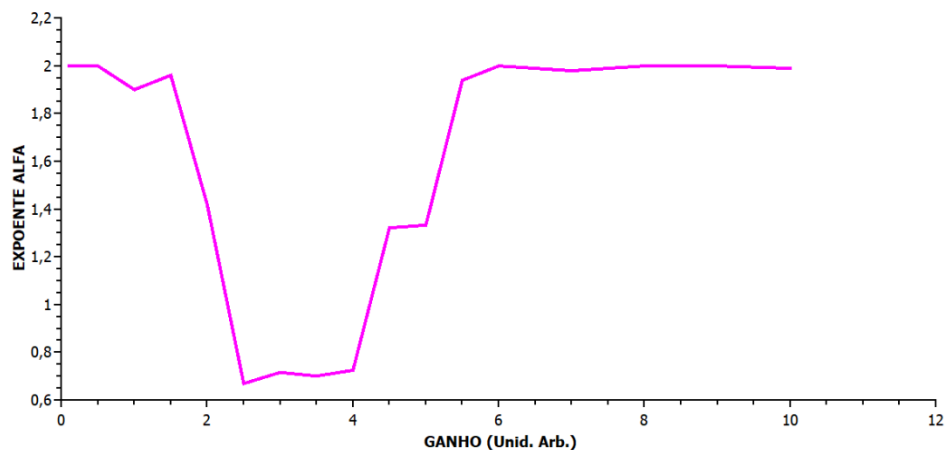
Contudo, para garantirmos que cada resultado destes é realmente uma distribuição gaussiana ou não-gaussiana, devemos considerar a seção 4.4. Os casos especiais da distribuição α –estável são:

- Distribuição Gaussiana ($\alpha = 2, \beta = \text{qualquer valor permitido}$)
- Distribuição de Lévy ($\alpha = 1/2, \beta = 1$)
- Distribuição de Cauchy $\alpha = 1, \beta = 0$)

O mais importante dos parâmetros é o expoente de Lévy $\alpha \in (0,2]$ que basicamente define se a distribuição é ou não gaussiana. Para grandes valores de uma variável aleatória $|x|$, a função de densidade de probabilidade se comporta como uma lei de potência na forma $P(x) = |x|^{-\alpha+1}$, de forma a obedecer a distribuição de Pareto (RAPOSO; GOMES, 2015). Segundo os autores, teremos regime gaussiano para $\alpha = 2$ e cauda Longa (regime de Lévy) para $0 < \alpha < 2$.

Dessa forma, para uma transição de regimes gaussiano-lévy-gaussiano, o expoente deve começar em 2, para um ganho abaixo do limiar, e a medida que as flutuações aparecem, o regime de Lévy também aparece com $0 < \alpha < 2$. Mostramos isto na fig. 24.

Figura 24 – Expoente alfa de Lévy em função do ganho.



Fonte: O autor (2020).

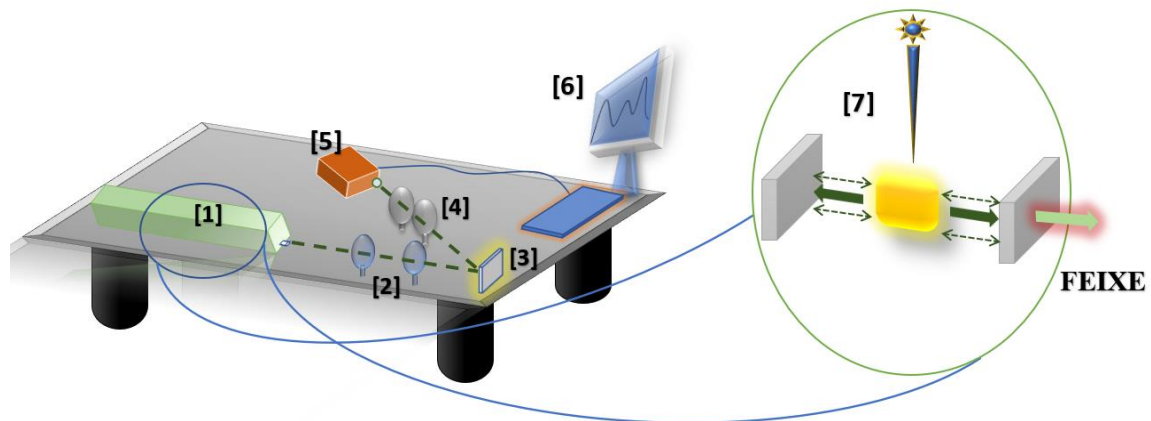
Nota-se que o expoente começa em 2 (regime gaussiano), passa por um vale (Lévy) e deve retornar para 2 com o aumento do ganho. Buscamos esta análise em lasers convencionais.

7 DISTRIBUIÇÃO DE LÉVY PARA AS FLUTUAÇÕES DE INTENSIDADE DE LASERS CONVENCIONAIS

Para sistemas cujo meio é desordenado, os voos de Lévy para a luz foi demonstrado com o fornecimento de ganho (SHARMA; RAMACHADRAN; KUMAR, 2006), que é uma energia de entrada para excitar o sistema, e sem o fornecimento de ganho (BARTHELEMY; BERTOLLOTTI; WIERSMA, 2008). Em ambos os casos, o meio contém partículas aleatoriamente espalhadas no qual os fótons percorrem trajetórias desordenadas com passos curtos ou passos longos, gerando assim uma distribuição de Lévy.

Nossa equipe levou isto como motivação para investigar se existe ou não existe distribuição de Lévy em um meio ordenado. O meio ordenado bem conhecido e que poderíamos usar é o próprio “laser convencional” ou “laser ordenado”. Procuramos observar as FIL da emissão de saída utilizando um modelo experimental bem simples, como mostramos na figura 25.

Figura 25 – Configuração experimental para análise das FIL convencionais.

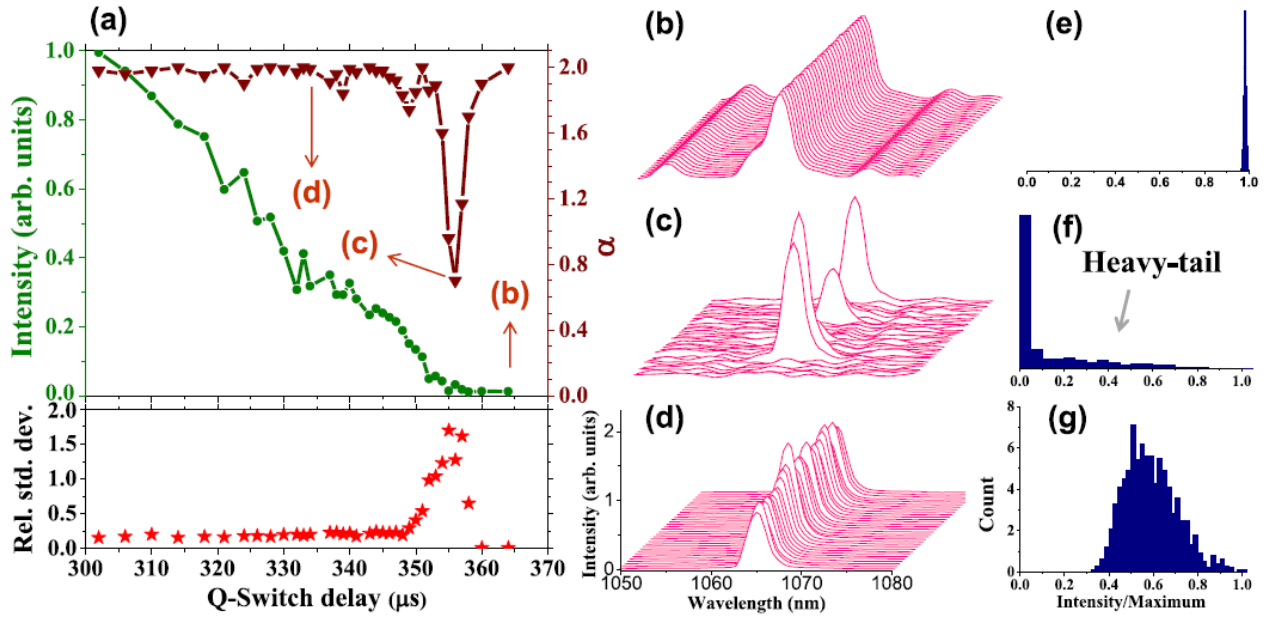


Fonte: O autor (2020).

Na figura 25 temos: [1] Laser Nd:YAG Q-switched operando em 1064 nm; [2] Polarizadores para diminuir a intensidade da luz; [3] Espelho refletor; [4] Lentes para colimar e focalizar o feixe; [5,6] espectrômetro que transforma o sinal luminoso em dados analisados em software apropriado; [7] O laser convencional que trabalhamos usa cristal de YAG dopado com íons de neodímio que são óticamente excitados por uma lâmpada interna cuja diferença de potencial para seu funcionamento é fixa. O objetivo é verificar os espectros obtidos com a variação do ganho oferecido ao sistema. Para isso controlamos o ganho usando o delay q-switched do laser. Esse experimento nos levou a descobrir grandes flutuações de intensidade, semelhante a

figura 5, só que para um sistema ordenado que é o laser convencional. Assim mostramos em (ROCHA *et al.*, 2020) que os voos de Lévy também aparecem em lasers ordenados e que não são exclusivos de sistemas desordenados. O resultado das medidas experimentais dispomos na figura 26.

Figura 26 – Voos de Lévy para lasers ordenados.



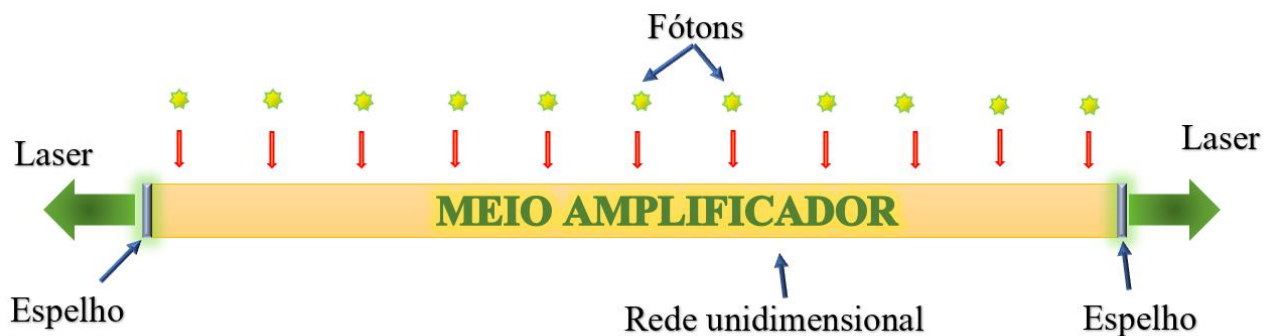
Fonte: ROCHA *et al.* (2020).

A figura 26 mostra a caracterização da emissão do laser Nd:YAG para 1000 realizações experimentais idênticas para cada valor do ganho (inversamente proporcional ao *Q-switch*). Temos: (a) Intensidade de emissão normalizada em unidade arbitrária, o expoente de Lévy α e o desvio médio relativo em função do atraso do Q-switch em micro segundos; (b)-(d) espectros das realizações experimentais para o atraso do Q-switch indicado na figura 26(a); (e)-(g) histogramas correspondentes para os espectros. A observação principal é que para as flutuações em torno do limiar de operação do laser – fig. 26(c) e (f) – o desvio padrão relativo oferece valor máximo, o expoente de Lévy oferece valor mínimo e o histograma oferece uma cauda longa.

Além disso, realizamos simulações de Monte Carlo em uma dimensão (1D) baseadas no artigo em (IGNESTI *et al.*, 2013). Nós consideramos um sistema unidimensional e um algoritmo que segue os seguintes passos: (1) Uma densidade de população N_0 inicia no estado excitado; (2) O número íons que relaxa espontaneamente num intervalo de tempo dt é calculada conforme o termo $N\tau dt$, onde N é a densidade de íons no estado excitado e τ é o tempo de vida

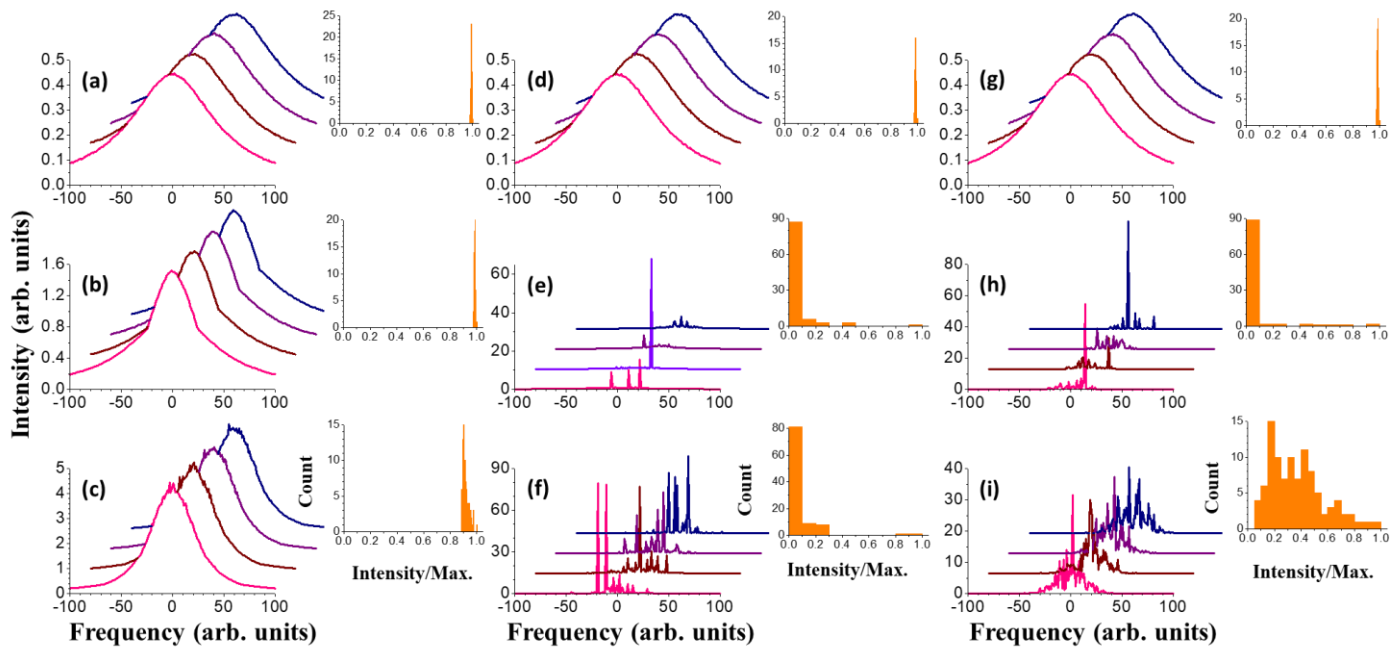
do nível de energia. Para simular uma transição real, consideramos que as frequências dos fótons foram distribuídas de acordo com a equação de Cauchy centrada na frequência de ressonância distribuída em canais de -100 à 100 (unidade arbitrária); (3) Nossa rede 1D faz com que os fótons criados por emissão espontânea tenha uma direção no eixo da cavidade (figura 27) com 50/50 por cento de probabilidade de caminhar para esquerda/direita; (4) A cada passo dos fótons dentro da região amplificadora, eles podem criar outros fótons por emissão estimulada de acordo com uma taxa proporcional à Nn , onde n é a densidade de fótons; (5) Nas extremidades temos os espelhos, isso significa que os fótons serão submetidos à uma refletividade $0 \leq R \leq 1$ tendo uma probabilidade de retornar para rede ou sair da rede, e se sair, será contabilizado sua intensidade e sua frequência. Para $R = 0$ não há espelhos e para $R = 1$ a cavidade é fechada e os fótons são sempre refletidos de volta. A intensidade é proporcional ao número de fótons que saíram naquele instante. Os resultados estão dispostos na figura 28.

Figura 27 – Sistema ilustrativo 1D para amplificação de luz.



Fonte: O autor (2020).

Figura 28 – Simulações Monte Carlo para as FIL ordenados.

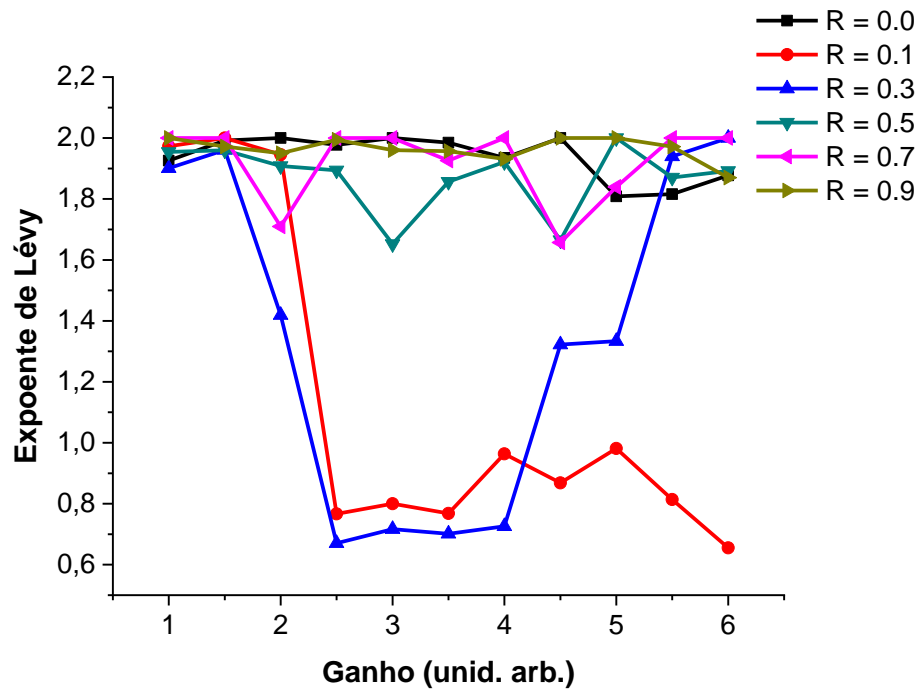


Fonte: O autor (2020).

As linhas da figura 28 correspondem, respectivamente, aos valores de $(1,0 \cdot 10^6)$, $(2,5 \cdot 10^6)$ e $(5,5 \cdot 10^6)$ para o ganho em unidades arbitrárias. Já as colunas correspondem às refletividades ($R = 0,0$), ($R = 0,1$) e ($R = 0,3$) respectivamente. A simulação foi feita para 100 espectros e os histogramas correspondentes para cada configuração foram inseridos no canto superior direito de cada conjunto de espectros. Observamos que a simulação nos forneceu a transição gaussiana-Lévy-gaussiana para as flutuações de intensidade de saída dos lasers convencionais, algo que até então só tinha sido discutido em lasers aleatórios.

Visto que podíamos testar outros parâmetros durante as simulações, relatamos outra observação sobre a importância da refletividade dos espelhos: para pequenos valores da refletividade, o efeito da distribuição de Lévy é mais intenso, exceto para refletividade nula. Observa-se os resultados na figura 29.

Figura 29 – Refletividade em função do ganho e do expoente de Lévy.



Fonte: O autor (2020).

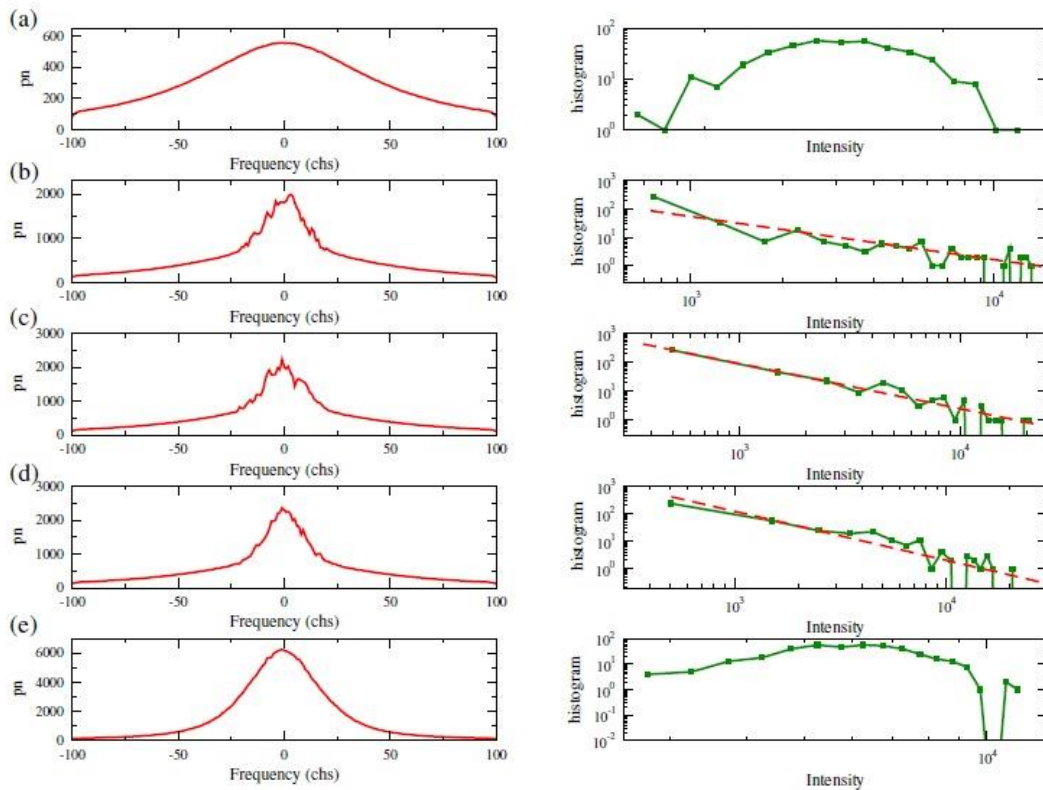
Notavelmente para R com os valores 0,0 ou 0,9 praticamente não há voos de Lévy. Isto ocorre porque nestas situações não há competição entre os modos ópticos e assim os fótons sortudos deixam de existir para gerar as grandes flutuações. E comparando $R = 0,1$, $R = 0,3$, $R = 0,5$ e $R = 0,7$ nota-se que para os maiores valores, o vale (figura 24) é menor, indicando que é mais fácil notar os voos de Lévy para baixas refletividades.

8 DISTRIBUIÇÃO DE LÉVY-PARETO EM LASERS CONVENCIONAIS

Uma outra discussão que os resultados anteriores nos levaram, foi a descoberta de uma lei de potência (Pareto) durante as grandes flutuações (Lévy) de intensidade no limiar do laser.

Para a figura 30 consideramos uma rede unidimensional de tamanho $L=2000$ e realizamos 400 simulações para cinco diferentes energias de excitação (900, 1200, 1215, 1225 e 3000, que segue a sequência de cima para baixo) em unidade de medida arbitrária. A coluna da esquerda mostra os espectros de emissão de saída e, notavelmente, só há flutuações durante o limiar, comprovando a transição do regime gaussiano (a) para Lévy (b), (c) e (d) retornando para gaussiano (e). A coluna da direita nos mostra os respectivos histogramas da contagem das intensidades na frequência de ressonância. Isto nos levou a observar uma “Lei de Potência” no limiar do regime laser (c). Então pela primeira vez, mostramos que durante o limiar laser em sistemas ordenados ocorrem os voos de Lévy e a Lei de Potência (Lévy-Pareto) para a luz.

Figura 30 – Transição de regimes Gaussiano – Lévy-Pareto – Gaussiano para as FIL.



Fonte: Argolo *et al.* (2019)

Os resultados se preparam para submissão em revista científica.

9 PERSPECTIVAS

Este trabalho foi desenvolvido durante atividades da iniciação científica, cujo grupo de pesquisa incluiu 3 alunos (Emanuel Pinheiro Santos – bolsista, Bruno José dos Santos – Colaborador, Erick Gomes Rocha – Colaborador) e 3 professores (Dr. André de Lima Moura - Orientador, Dr. Carlos Argolo P. Alves – co-orientador, Dr. Samuel Silva de Albuquerque – co-orientador).

Com a publicação do nosso trabalho na revista *Physical Review A* (apêndice B) encerramos um ciclo de pesquisa. Mas outro se abriu e agora estamos buscando investigar novas identidades nos lasers, tanto aleatórios quanto convencionais, e nos sistemas ópticos. Nossa nova investigação será a partir de quatro vertentes: i) Estudo da correlação das flutuações de intensidade dos lasers; ii) Estudo da quebra de simetria de réplica em lasers aleatórios e convencionais; iii) Estudo de regimes caóticos nos lasers e em sistemas ópticos; iv) nanotermometria óptica em íons terras-raras para aplicações biológicas. Descrevo um pouco sobre nossas motivações a seguir.

9.1 ANÁLISE DA CORRELAÇÃO PARA AS FIL

A investigação das correlações entre as flutuações de emissão dos lasers foi investigada em lasers aleatórios (ZHU; GHU; NOGINOV, 2012) onde foi mostrado que não necessariamente as FIL aleatórios estão correlacionadas com as FIL de excitação. Isto é, enquanto as intensidades da fonte de excitação exibem um regime estatístico, as intensidades da emissão do laser aleatório podem exibir outro diferente. A correlação é definida por uma equação chamada de “overlap parameter”, em acordo com o “coeficiente de Pearson”:

$$q_{\alpha\beta} = \frac{\sum_{k=1}^N \Delta_{\alpha}(k) \Delta_{\beta}(k)}{\sqrt{\sum_{k=1}^N \Delta_{\alpha}^2(k)} \sqrt{\sum_{k=1}^N \Delta_{\beta}^2(k)}} \quad (24)$$

Onde $\alpha, \beta = 1, 2, 3 \dots, N_s$ tal que N_s é a quantidade de réplicas analisadas, ou espectros. A intensidade média no comprimento de onda indexado por k é definida como $\bar{I}(k) = \sum_{\alpha=1}^{N_s} I_{\alpha}(k) / N_s$, e a flutuação de intensidade é dada por $\Delta_{\alpha}(k) = I_{\alpha}(k) - \bar{I}(k)$. Analogamente estas considerações são feitas para o subíndice β . O objetivo de estudar a correlação é para

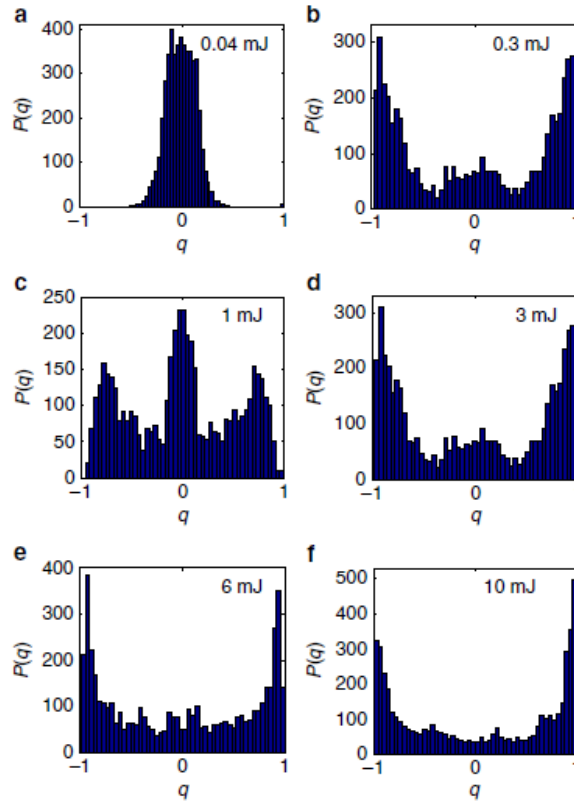
tentar tirar conclusões teóricas acerca dos fenômenos ópticos, tais como a “quebra de simetria de réplica”.

9.2 QUEBRA DE SIMETRIA DE RÉPLICA (QSR)

O conceito da Quebra de Simetria de Réplica (QSR), do inglês Replica Symmetry Breaking, foi introduzida pelo físico italiano Giorgio Parisi no final da década de 1970 para descrever a situação em que sistemas magnéticos desordenados exibem medidas experimentais distintas, mesmo tendo-os sido identicamente preparados. A quebra de simetria de réplica indica que, para mesmas condições iniciais, as réplicas deixam de ser equivalentes, levando, cada uma, a valores distintos.

No contexto da fotônica, a quebra de simetria de réplica tem sido demonstrada experimentalmente para um sistema desordenado (GOFRANIHA *et al.*, 2015), que é o caso do laser aleatório, e para um sistema ordenado, como os lasers convencionais (MOURA. *et al.*, 2017). A análise da QSR é feita através da análise estatística utilizando a equação 24.

Figura 31 – Quebra de simetria de réplica em laser aleatório.

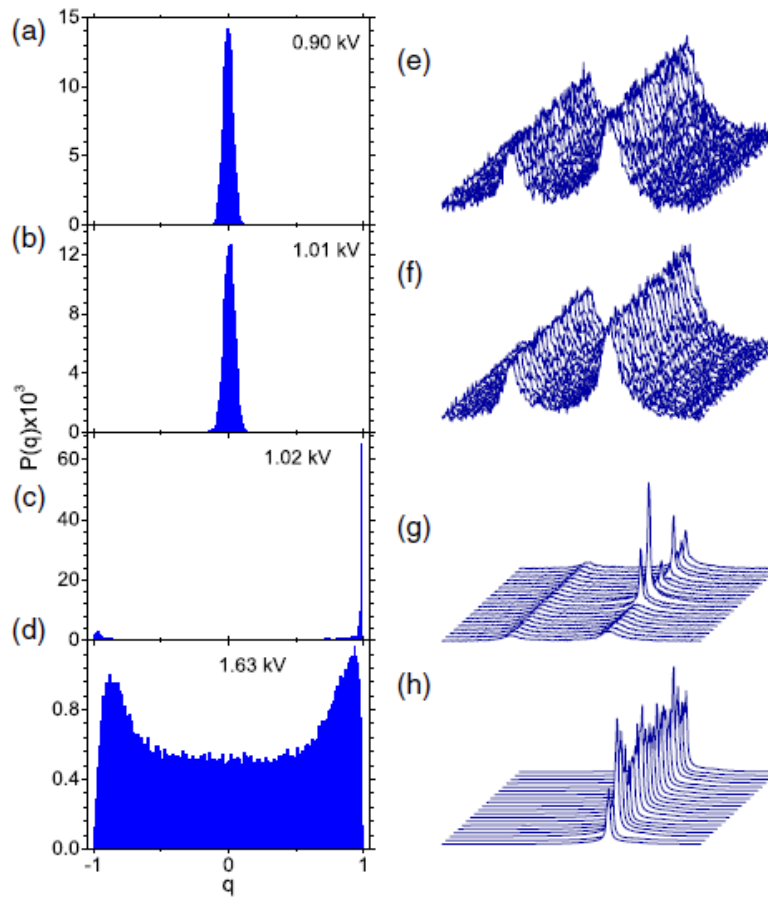


Fonte: Gofraniha *et al.* (2015).

Os autores mostraram que aumentando a energia de bombeamento, a função de distribuição do parâmetro “q” deixa de ser centrado na origem e passa a popular os máximos e mínimos. A figura 31 mostra o resultado obtido por eles, vejamos que na passagem da fig. 31.a para a fig. 31.f a energia de bombeamento (indicada no canto superior direito de cada quadro) aumenta e a distribuição de “q” mostra que as réplicas deixam de ser simétricas.

Em 2017 foi mostrado o mesmo comportamento do overlap, só que em um sistema ordenado, utilizando um laser Nd:YAG Q-switched.

Figura 32 – Quebra de simetria de réplica em laser ordenado.



Fonte: Moura *et al.* (2017)

Da fig. 32.a até a figura 32.d tem-se a distribuição de q e as respectivas réplicas experimentais ao lado (fig. 32e-h). Nota-se que após um certo valor de ganho, a distribuição de q deixa de ser centrada na origem. O mesmo grupo, em um trabalho publicado no ano anterior, (GOMES *et al.*, 2016), mostrou que a distribuição de Lévy para as flutuações de intensidade de um laser aleatório coincide com o início da quebra da simetria de réplica.

De qualquer forma, em nenhum trabalho foi mostrado um retorno para o centro na

distribuição do parâmetro q . Este é um dos pontos que buscamos investigar e possivelmente encontrar, também, se existe algum sistema onde a quebra de simetria de réplica não coincida com o limiar do laser.

9.3 CAOS EM SISTEMAS DINÂMICOS E LASERS

A outra vertente que estudamos é sobre sistemas caóticos em lasers. Notando que existe aleatoriedade intrínseca aos estudos estatísticos das flutuações de intensidade dos lasers, como viemos discutindo até então, buscamos, também, investigar se existe mesmo a quebra de simetria de réplica ou, se ela não existir, uma possível resposta da explicação sobre as fortes flutuações durante as proximidades do limiar laser.

Uma outra análise mencionada em (ROCHA *et al.*, 2020) é o contexto das “rogue waves” para explicar o fenômeno das flutuações de intensidade nos lasers. Outra contextualização é que os lasers podem exibir caos (MUJUMDAR *et al.*, 2007) em um sistema desordenado. Nesta perspectiva queremos investigar mais afundo o comportamento caótico que os lasers podem exibir, tanto em sistemas ordenados quanto desordenados. Abaixo relatamos um pouco da nossa motivação, mostrando alguns sistemas matemáticos e físicos que exibem comportamento caótico. Todos os códigos usados para gerar os gráficos estão disponíveis no apêndice A.

9.3.1 Caos Determinístico em Sistemas Dissipativos

Um dos primeiros cientistas a propor um sistema caótico foi o matemático francês Henri Poincaré. Ele notou que sistemas dinâmicos governados pelas equações de Hamilton poderiam mostrar comportamento imprevisível a depender dos parâmetros iniciais. Isto é o que chamamos de caos.

Caos Determinístico (CD) é assim chamado quando é possível encontrar comportamentos imprevisíveis mesmo o sistema sendo determinístico. A existência de CD é consequência direta de que certos sistemas possuem de ser extremamente sensíveis às condições iniciais, ou seja, um pequeno erro nas condições iniciais pode causar grandes diferenças nos resultados finais.

9.3.2 Atrator de Lorenz

Em torno de meio século após a morte de Poincaré, um outro cientista, Edward Lorenz, meteorologista, descobriu um dos princípios fundamentais da teoria do caos: o efeito borboleta.

O efeito borboleta é conhecido pela interpretação de que uma simples borboleta batendo suas asas em um lugar do mundo pode causar uma grande interferência em outro lugar distante. Lorenz estava estudando modelos para correntes de convecção da atmosfera quando formulou as equações diferenciais acopladas:

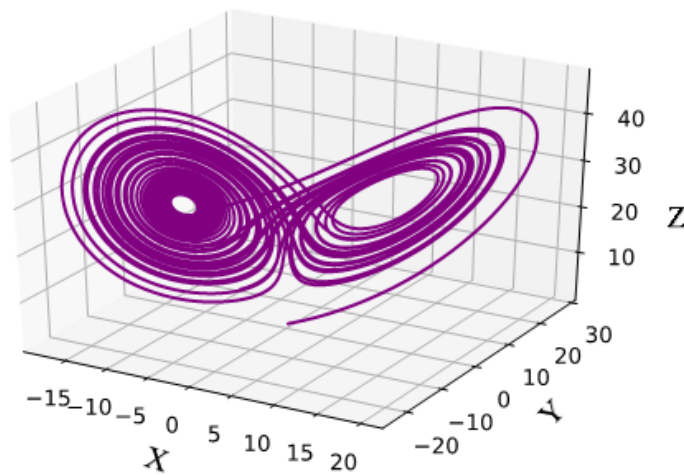
$$\frac{dx}{dt} = \sigma(-x + y) \quad (25)$$

$$\frac{dy}{dt} = rx - y - xz \quad (26)$$

$$\frac{dz}{dt} = -bz + xy \quad (27)$$

Essas equações geram o que se chama de “atrator de Lorenz”. Os parâmetros são o número de Prandtl σ , o número de Rayleigh r e b que é uma constante. Não entraremos em detalhes quando a estas equações, mas usualmente é utilizado os valores $\sigma = 10$, $r = 28$ e $b = 8/3$. O conjunto de soluções para x , y e z , quando feito o gráfico, lembram a imagem de uma borboleta. Talvez por isso o atrator de Lorenz se tornou uma das “figuras” mais conhecidas na teoria do caos, relacionando-se com o conceito do efeito borboleta. Na figura 33 usamos estes dados.

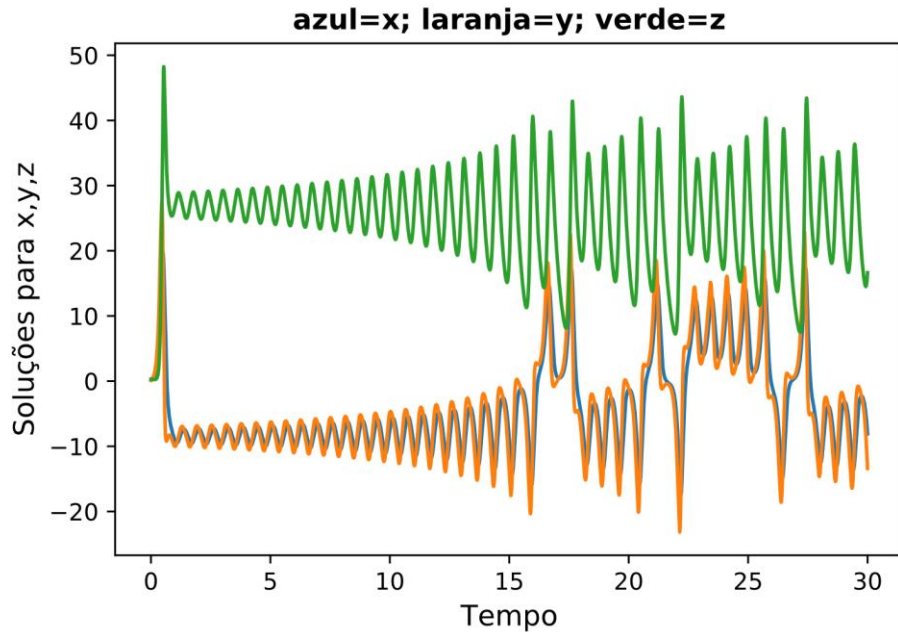
Figura 33 – Atrator de Lorenz 3D.



Fonte: O autor (2020).

Resolvemos estas equações utilizando programação Python e Fortran usando o método de Runge-Kutta de ordem 4. Abaixo temos o gráfico de x , y e z em função do tempo.

Figura 34 – Sinal caótico do atrator de Lorenz.



Fonte: O autor (2020).

Notamos que o resultado é caótico e que a solução em x e y se mostram muito próximas. Já as soluções para z estão mais distantes, apesar do padrão similar.

Lorenz calculou valores por longo tempo até que finalmente entendeu o significado da experiência de suas equações. O que ele observou foi uma sensível dependência as condições iniciais, um quadro chave para a dinâmica caótica. Lorenz apresentou seus resultados num artigo em 1979 no encontro da Associação Americana para o Avanço da Ciência.

9.3.3 ATRATOR DE ROSSLER

O atrator de Lorenz é um atrator estranho. Atrator estranho é um verbete para designar um conjunto de vetores, dentro da Teoria do Caos, onde sua evolução temporal mostra um padrão não-linear. Outro atrator estranho que mostraremos para efeito de comparação é o atrator de Rossler, que surgiu depois do modelo de Lorenz e possui as seguintes equações:

$$\frac{dx}{dt} = -y - z \quad (28)$$

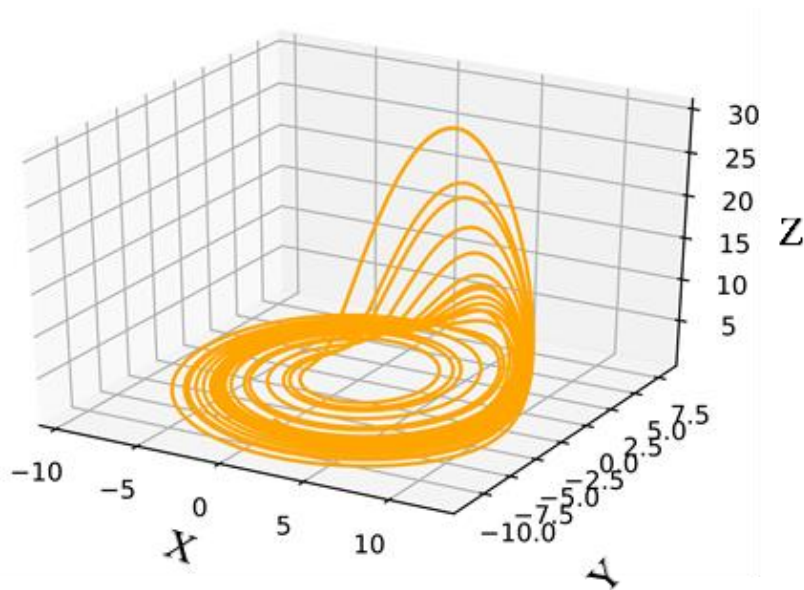
$$\frac{dy}{dt} = x + ay \quad (29)$$

$$\frac{dz}{dt} = b + z(x - c) \quad (30)$$

Onde x , y e z são as coordenadas espaciais do atrator. As constantes são comumente utilizadas como $a = 0,2$; $b = 0,2$; $c = 5,7$. Embora outros valores possam ser usados para essas constantes. Mais uma vez, não entraremos em detalhes quanto a este assunto. Nesse momento, o nosso interesse aqui é mostrar alguns exemplos de sistemas caóticos para tentar encontrar analogias entre tais sistemas e os sistemas ópticos.

Comparando as equações do atrator de Lorenz com as do atrator de Rossler, é notável que elas são um tanto semelhantes. Mesmo com suas semelhanças, as soluções de Rossler geram um atrator bastante diferente, como mostramos na figura abaixo. Isso porque a teoria do caos nos diz que uma pequena diferença nas condições iniciais, pode mudar totalmente o trajeto e os resultados futuros.

Figura 35 – Atrator de Rossler 3D.



Fonte: O autor (2020).

Uma experiência interessante é assistir a uma simulação. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=abr9VhLIsJ4>. Acesso em: 04 maio 2020.

9.3.4 Mapa Logístico

Para finalizar, vamos mostrar apenas mais um sistema dinâmico em que podemos visualizar a beleza de um sistema caótico e fractal: o mapa logístico. Este mapa é o modelo discreto da equação de Verhulst, criado para representar a evolução temporal de uma certa população:

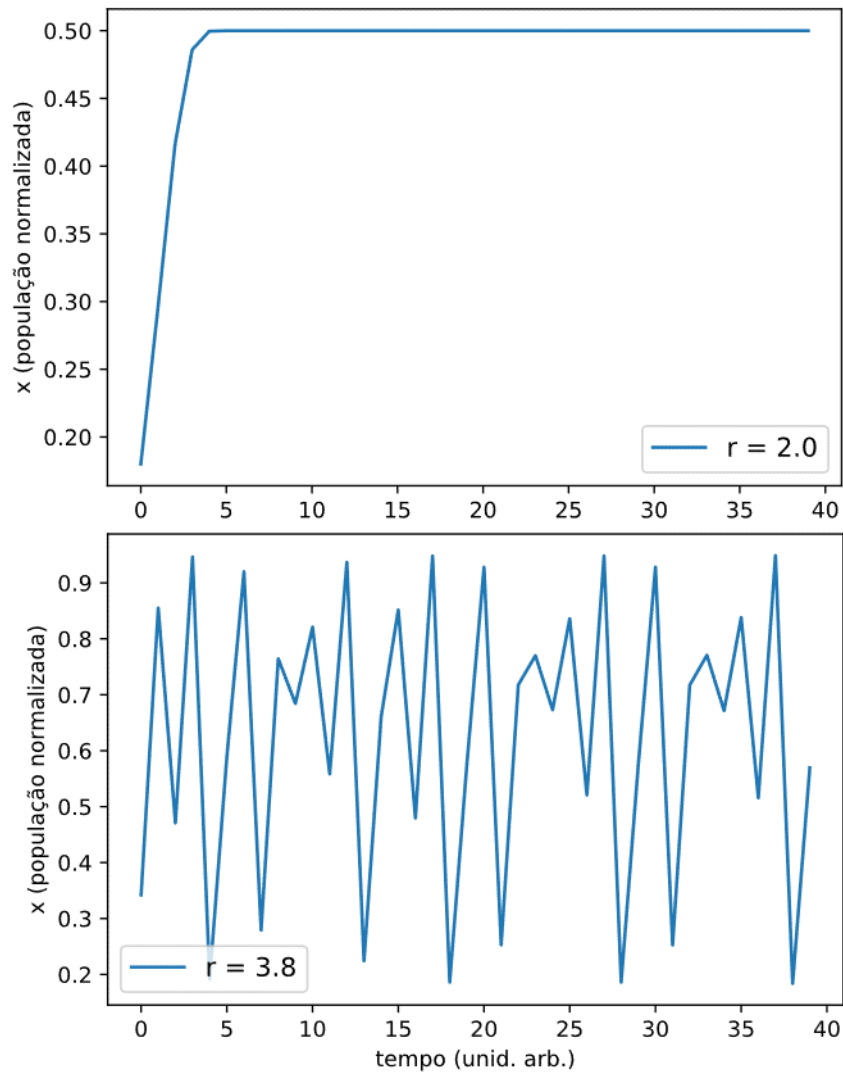
$$x_{i+1} = rx_i(1 - x_i) \quad (31)$$

Onde x_i é um número entre 0 e 1 que representa a razão da população existente em relação a população máxima possível. O parâmetro $r \in [0,4]$ define como será a evolução temporal da equação 31. No geral, buscamos soluções de equilíbrio onde $x_{i+1} = x_i$. Este mapa descreve os seguintes estados para x_{i+1} :

- Nascimento: o termo positivo ao lado direito da equação 31 representa a reprodução. A população aumentará a uma taxa proporcional à população atual, isto quando o termo positivo for o prevalecente.
- Morte: o termo negativo ao lado direito da equação 31 representa a diminuição da população. A população diminuirá a uma taxa proporcional à população atual, isto quando o termo negativo for o prevalecente.

Na figura 36 construímos o gráfico da população em função do tempo para diferentes valores de r para mostrar a importância deste parâmetro.

Figura 36 – Solução temporal do modelo de Verhulst.



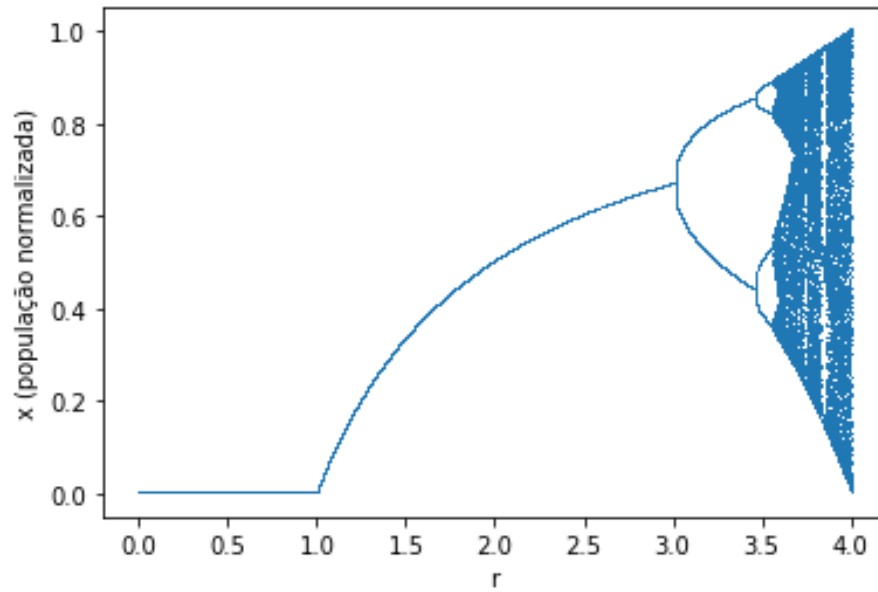
Fonte: O autor (2020).

O que acontece, analisando a equação 31, é que obtemos as possíveis soluções:

- Para $0 \leq r \leq 1$ a única solução é $x = 0$. Isto significa que a população eventualmente desaparece, independentemente do valor de r nesses limites.
- Para $1 < r \leq 3$ a solução é dada por $x = 1 - 1/r$.
- Para $3 < r < 3.45$ aproximadamente, a solução oscila entre dois valores.
- Com o aumento do valor de r a oscilação dos resultados tende a aumentar e cada vez mais nos aproximamos do caos. Vejamos que na figura 36, o valor de r faz com que a função oscile muito mais quando tende ao valor 4.

Então mostramos agora, o gráfico da população contra o parâmetro r na figura abaixo.

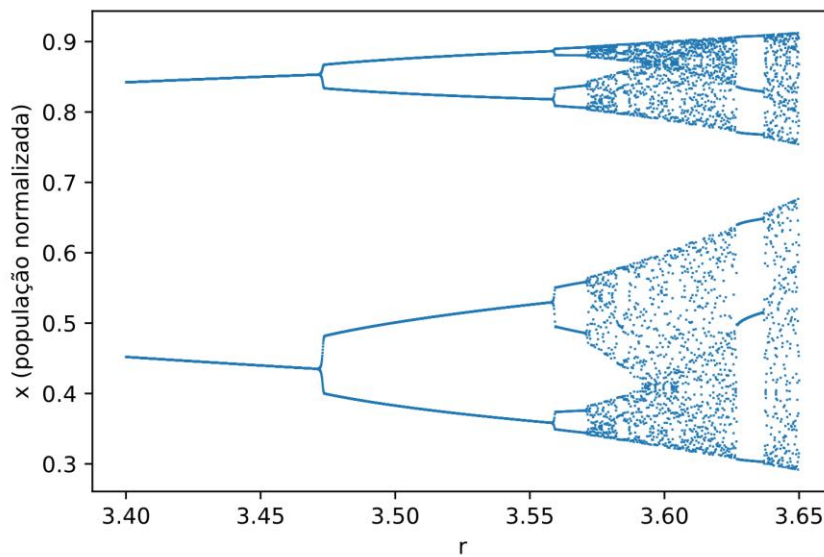
Figura 37 – Mapa logístico.



Fonte: O autor (2020).

Nota-se que quanto mais r tende a 4, mais valores são encontrados e a figura tende a se comportar caoticamente. No entanto ela tem natureza de um fractal, como revelamos na figura 38 dando um zoom na região $3.40 \leq r \leq 3.65$.

Figura 38 – Zoom no mapa logístico.



Fonte: O autor (2020).

Observamos a repetição da bifurcação inicial que ocorreu em $r = 3$ e assim mostramos a natureza fractal deste mapa. Mais uma experiência bastante motivadora é vermos as infinitas bifurcações deste mapa através de simulação computacional. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=PtfPDfoF-iY>. Acesso em: 25 maio 2020.

Diante deste cenário de aleatoriedade e comportamentos caóticos, é possível que os lasers também estejam dentro deste contexto. Além do mais, o mapa logístico possui uma natureza fractal, algo que podemos buscar explorar analogias com os lasers.

9.4 NANOTERMOMETRIA

A outra vertente em que é alvo de nossa dedicação é o campo da nanotermometria, onde investigamos a ação lasers em íons terras raras para fins de aplicações em termômetros ópticos e aplicações biológicas. Atualmente, o autor colabora no estudo da excitação de íons de neodímio em seu estado trivalente com excitação não ressonante em 1064nm. Abaixo descrevemos um pouco sobre este estudo.

O atual projeto é fruto de uma pesquisa experimental e teórica, durante a pandemia do Coronavírus (COVID -19) no ano de 2020. Os participantes do projeto são dois alunos de iniciação científica (Emanuel e Rodrigo) e dois professores da Universidade Federal de Alagoas (Dr. André Moura e Dr. Jefferson Silva).

9.4.1 Avalanche de Fótons

Excitamos nanopartículas cristalinas estequiométricas de (NDBYO) em 1064nm. Este comprimento de onda corresponde a uma energia que não é ressonante com nenhum nível real do neodímio, mas mesmo assim, devido a processos como relaxação cruzada de níveis e acoplamentos térmico, conseguimos observar uma amplificação das intensidades enquanto a temperatura da amostra aumentava, isso devido a uma excitação contínua. O trabalho foi publicado no periódico *Applied Physics Letters* (SILVA *et al.*, 2020).

9.5 QUESTIONAMENTOS E CONSIDERAÇÕES FINAIS DO AUTOR

A partir de toda esta discussão, existe outras analogias entre os sistemas dinâmicos e os Lasers (des)ordenados? Existe algum espaço para observação de um fractal dentro dos limites de nossas investigações? Quais as possíveis relações entre a teoria do caos e o contexto da fotônica? Poderiam os Lasers ter um retorno ao parâmetro inicial do overlap no contexto da

correlação de Pearson? Podemos esclarecer ainda mais sobre os mecanismos subjacentes que causam as flutuações de intensidade dos lasers? Quantos mecanismos distintos existem e que são capazes de desencadear a estocasticidade das FIL? Aonde mais podemos fazer analogias entre os lasers e a teoria do caos? É possível existir um laser convencional no regime “superdifuso”? Quais as aplicações que podemos propor ou fazer para tais discussões? Existe outro tipo de laser?... Existem diversas perguntas que buscamos estudar e que será a continuidade de nossas pesquisas.

Um outro tópico em estudo, por nossa equipe, são os sistemas ópticos em que podemos observar a conversão ascendente ou descendente de energia (*upconversion* e *downconversion*) onde pode-se relacionar fótons e fônons. Dentro outros processos no campo da nanotermometria óptica como transferência de energia entre íons. Buscamos encontrar novas medidas nestes sistemas.

Além do estudo à todas as indagações descritas acima, nosso interesse é, também, investigar mais semelhanças e diferenças entre o comportamento dos lasers aleatórios e convencionais e suas aplicações. Além disto, buscamos estudar as análises estatísticas e verificar se existe alguma analogia entre a quebra de simetria de réplica e a um possível sistema caótico.

A sessão dentro das perspectivas que trata do estudo caos foi orientada pelo professor Dr. Carlos Argolo Pereira Alves, que é também professor do Instituto Federal de Alagoas, cujo tema tem sido também orientação para o trabalho de conclusão de curso de um aluno do ensino médio.

Para todos os gráficos produzidos nesta parte do trabalho – nas perspectivas – o algoritmo escrito pelo autor está disponível no apêndice A. Os demais gráficos que fizemos, caso o leitor tenha interesse, nós disponibilizamos o algoritmo, basta nos contactar. A programação é descrita na linguagem Python, C e Fortran.

REFERÊNCIAS

- BARTHELEMY, P.; BERTOLOTTI, J.; WIERMSMA, D. S. A Lévy flight for light. **Nature**, v. 453, p. 495-498, 22 may 2008.
- BREHM, J.J.; MULLIN, W.J. **Introduction to the structure of matter**: a course in modern physics. New Jersey: John Wiley & Sons, 1989.
- CAO, H. *et al.* Random laser action in a semiconductor powder. **Physical Review Letters**, v. 82, p. 2278-2281, 15 mar. 1999.
- CePOF & INCT ÓPTICA BÁSICA E APLICADA. Prof. Dr. Luiz Antônio de Oliveira Nunes, apresentou a palestra subordinada ao tema Do Maser ao Laser (O Laser Pointer Verde). [São Paulo]: USP, [2019]. 1 vídeo (76 min). Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Pb5RI4CxGbI&t=1403s>. Acesso em: 18 mar. 2020.
- EINSTEIN, A. Zur Quantentheorie der Strahlung (On the quantum theory of radiation). **Physika Zeitschrift**, v. 18, p. 121-128, 1917.
- FARIAS, A.; SOARES, J.; CÉSAR, C. **Introdução à estatística**. Rio de Janeiro: LTC, 2003.
- FRANKEN, P. A. *et al.* Generation of optical harmonics. **Physical Review Letters**, v.7, p. 118-119, 15 aug. 1961.
- IGNESTI, E. *et al.* Experimental and theoretical investigation of statistical regimes in random laser emission. **Physical Review A**, v. 88, p. 033820, 9 sep. 2013.
- GHOFRANIHA, N. *et al.* Experimental evidence of replica symmetry breaking in random lasers. **Nature communications**, v. 6, n. 6058, 14 jan. 2015.
- GÓNZALES, N. *et al.* Influence of fifth order nonlinearities on the statistical fluctuations in emission intensities in a photonic open cavity complex system. **Physical Review A**, v. 102, p. 063515, 11 dec 2020.
- GOMES, A. S. L. *et al.* Observation of Lévy distribution and replica symmetry breaking in random lasers from a single set of measurements. **Scientific Reports**, v. 6, n. 27987, 13 jun. 2016.
- LAWANDY, N. M. *et al.* Laser action in strongly scattering media. **Nature**, v. 368, 436-438, 31 mar. 1994.
- LEPRI, S. *et al.* Statistical regimes of random laser fluctuations. **Physical Review A**, v. 75, p. 063820, 21 jun. 2007.
- LETOKHOV, V. S. Stimulated emission of an ensemble of scattering particles with negative absorption," **JETP Let**, v. 5, p. 212-215, apr. 1967.
- LIMA B. C. *et al.* Observation of Lévy statistics in one-dimensional erbium-based random fiber laser. **JOSA B**, v. 34, p. 293-299, 10 jan. 2017.

MARKUSHEV, V.M.; ZOLIN, V.F.; BRISKINA, C.M. Luminescence and stimulated emission of neodymium in sodium lanthanum molybdate powders. **Sov. J. Quantum Electron**, v. 16, p. 281-283, feb. 1986.

MARQUES, C. J. F. **Geração de Luz por efeitos não lineares de segunda ordem**. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) – Universidade Federal de Alagoas, Campus Arapiraca, Arapiraca, 2018.

MOURA, A. L. *et al.* Random lasing in Nd³⁺ doped potassium gadolinium tungstate crystal powder. **Journal of Applied Physics**, v. 117, p. 08312, 23 feb. 2015.

MOURA, A. L. *et al.* Replica symmetry breaking in the photonic ferromagneticlike spontaneous mode-locking phase of a multimode Nd: YAG laser. **Physical Review Letters**, v. 119, p. 163902, 20 oct. 2017.

MUJUMDAR, S. *et al.* Amplified extended modes in random lasers. **Physical Review Letters**, v. 93, p. 053903, 30 jul. 2004.

MUJUMDAR, S. *et al.* Chaotic behavior of a random laser with static disorder. **Physical Review A**, v. 76, p. 033807, 7 sep. 2007.

BOHR, N. On the construction of atoms and molecules. **Philos. Mag**, v. 26, p. 1-25, 1913.

NOGINOV, M. A. *et al.* Short-pulsed stimulated emission in the powders of NdAl₃(BO₃)₄, NdSc₃(BO₃)₄, and Nd:Sr₅(PO₄)₃F laser crystals. **J. Opt. Soc. Am. B.**, v. 13, p. 2024-2033, n.9, sep. 1996.

PARENTE, F.A.G.; SANTOS, A.C.F.; TORT, A.C. Os 100 anos do átomo de Bohr. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 35, p. 1-8, 15 out. 2013.

PAULA, R. R. **Método Monte Carlo e aplicações**. 2014. Monografia (Graduação em Matemática) – Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, RJ, 2014.

PINHEIRO, E. Física moderna: lasers. Arapiraca: O Autor, 14. ago. 2019. 1 vídeo (26 min). Publicado pelo canal Emanuel Pinheiro. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=ZPOh1ML7ggA&t=638s>. Acesso em: 18 mar. 2020.

QPAGE. Nd: YAG Laser. [S. l.: s. n.], 2014. 1 vídeo (2 min). Publicado pelo canal Qpage. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=XI18Is5Lp9I>. Acesso em: 25 mar. 2020.

RAPOSO, E. P.; GOMES, A. S. L. Analytical solution for the Lévy-like steady-state distribution of intensities in random lasers. **Physical Review A**, v. 91, p. 043827, 16 apr. 2015.

ROCHA, E. G. **Voos de Lévy para luz em sistemas ordenados**. 2019. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) – Universidade Federal de Alagoas, Campus Arapiraca, Arapiraca, 2019.

ROCHA *et al.* Self-induced optical parametric amplification of random laser emission. **Laser Physics**, v. 29, p. 045402, 7 mar. 2019.

ROCHA *et al.* Lévy flights for light in ordered lasers. **Physical Review A**, v. 101, p. 023802, 14 feb. 2020.

SHARMA, D.; RAMACHANDRAN, H.; KUMAR, N. Lévy statistical fluctuations from a random amplifying medium. **Fluctuations and Noise Letters**, v.6, p. L95-L101, n.1, jan. 2006.

SILVA, J. F. *et al.* Photon-avalanche-like upconversion in $\text{NdAl}_3(\text{BO}_3)_4$ nanoparticles excited at 1064nm. **App. Phys. Lett.** v. 117, p. 151102, 13 oct. 2020.

STABLE distribution. *In*: Wikipedia. [S. l.: s.n.], 20--. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Stable_distribution. Acesso em: 06 abr. 2020.

TOMMASI, F. *et al.* Superdiffusive random laser. **Physical Review A**, v. 99, p. 063836, 28 jun. 2019.

ZHU, G.; GU, L.; NOGINOV, M. A. Experimental study of instability in a random laser with immobile scatterers. **Physical Review A**, v. 85, p. 043801, 2 apr. 2012.

APÊNDICE A – PROGRAMAS EM PYTHON

Aqui disponibilizamos alguns algoritmos realizados para nossos resultados durante o artigo.

- **Exercício sobre o Método de Monte Carlo**

Imagine uma circunferência de raio igual a 1 metro inscrita em um quadrado de lado igual a 2 metros. Determine a área da circunferência sem utilizar a fórmula da área da circunferência.

Solução: Usamos o método de Monte Carlo, segue o código em python abaixo.

```
import random
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

y = []
x = []

r = 1 #raio do circulo
l = 2 #lado do quadrado

Pq = [] #Pontos no quadrado
Pc = [] #Pontos na circunferência

for i in range(1000):
    lx=random.uniform(-1, 1)
    x.append(lx)
    ly=random.uniform(-1, 1)
    y.append(ly)

    d=(lx**2 + ly**2)**0.5

    if d>r:
        ponto=1
        Pq.append(ponto)
    else:
        ponto=1
        Pq.append(ponto)
        Pc.append(ponto)

Aq = l**2

Ac = (np.pi)*r**2
```

```
A2c = (len(Pc)/len(Pq))*100
A3c = (len(Pc)/len(Pq))*Aq
```

```
print()
print(f'A área do círculo, cujo valor é {A3c} metros, corresponde a {A2c}% da área do quadrado.')
```

```
#Desenho da figura
```

```
x0 = 0
y0 = 0
```

```
t = np.linspace(0, 2*np.pi,100)
ax = x0 + r*np.cos(t)
ay = y0 + r*np.sin(t)
```

```
r1 = []
r2 = []
```

```
for i in range(100):
    r1.append(1)
    r2.append(-1)
reta= np.linspace(-1,1,100)
```

```
plt.plot(r1, reta,'b')
plt.plot(reta, r1,'b')
plt.plot(reta, r2,'b')
plt.plot(r2, reta,'b')
plt.plot(ax,ay,'r-')
plt.axis('equal')
plt.xlabel('x (metros)')
plt.ylabel('y (metros)')
```

Para os interessados, está disponível o link a seguir do vídeo feito pelo autor realizando este exemplo. Disponível em:

https://www.youtube.com/watch?v=pdSmL1EhsEQ&ab_channel=EmanuelPinheiro. Acesso em: 02 jan. 2021.

- **Solução das equações de Taxa** – capítulo 5 – com um bombeamento adaptado (triangular ao invés de gaussiano). Usamos o método de Euler no python.

#vamos calcular $n(t)$ e $E(t)$ do Noginov1996 adaptado para um bombeamento $k(t)$ triangular

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
b = []      #lista com os valores do bombeamento
time = []   #lista com os valores do tempo t
energy = []  #lista com os valores das emissões E
numpop = [] #lista com os valores do numeros da população no estado excitado
```

```
k = 0      #bombeamento para t=0
n = 0      #população no estado excitado no t=0
E = 0      #emissão em t=0
DT = 3.5E-12 #incremento
ET = .2     #integral da energia em Joules
```

```
for i in range(5001):
```

```
    t = i*DT
```

```
    if t<=5E-9:
```

```
        k = 4.0E16*ET*t          #bombeamento na subida do triângulo
        dndt = k*4.0E19-n*1.0E5-n*E*15.0E10    #equações acopladas, resolvemos pelo
método de euler
        dEdt=-E*1.0E11+n*1.0E-14+n*E*3.0E-8
        n=n+DT*dndt
        E=E+DT*dEdt
```

```
        numpop.append(n)
        energy.append(E)
```

```
    elif 5E-9<t<=10E-9:
```

```
        k = 4.0E8*ET-4E16*ET*t      #bombeamento na descida do triângulo
        dndt = k*4.0E19-n*1.0E5-n*E*15.0E10
        dEdt=-E*1.0E11+n*1.0E-14+n*E*3.0E-8
        n=n+DT*dndt
        E=E+DT*dEdt
```

```
        numpop.append(n)
        energy.append(E)
```

```
    else:
```

```

k = 0                                #fim do bombeamento
dndt = k*4.0E19-n*1.0E5-n*E*15.0E10
dEdt=-E*1.0E11+n*1.0E-14+n*E*3.0E-8
n=n+DT*dndt
E=E+DT*dEdt

numpop.append(n)
energy.append(E)

b.append(k)
time.append(t)

energymax = max(energy)

energynorm = []

for i in energy:
    h = i/energymax
    energynorm.append(h)

plt.plot(time,numpop, color='orange', linewidth='3')
plt.xlabel('Tempo(s)', fontweight='bold', fontsize='12')
plt.ylabel('Pop. Est. Excitado (cm-3)', fontweight='bold', fontsize='12')
#plt.savefig('bombeamento')
plt.show()
plt.plot(time,energynorm, color='red', linewidth='3')
plt.xlabel('Tempo(s)', fontweight='bold', fontsize='12')
plt.ylabel('Emissão (unid. arb.)', fontweight='bold', fontsize='12')
#plt.savefig('bombeamento')
plt.show()

```


- **Atrator de Lorenz resolvido pelo método de Runge-Kutta de ordem 4 em python:**

```
#bibliotecas para geração dos gráficos
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d

#parâmetros
r=28. ; H=0.001 ; sigma=10. ; b=8./3.
x=0.2 ; y=0.1 ; z=0.3

#equações do atrator de Lorenz
def g1(x,y,z,T):
    return sigma*(y-x)
def g2(x,y,z,T):
    return r*x-y-x*z
def g3(x,y,z,T):
    return x*y-b*z

#lista para inserir as soluções
solx=[]
soly=[]
solz=[]
solt=[]

#loop para realizar o método de RK4
for i in range(1, 30001):
    T=H*i
    xK1=H*g1(x,y,z,T)
    yK1=H*g2(x,y,z,T)
    zK1=H*g3(x,y,z,T)

    xK2=H*g1((x+xK1/2.0),(y+yK1/2.0),(z+zK1/2.0),(T+H/2.0))
    yK2=H*g2((x+xK1/2.0),(y+yK1/2.0),(z+zK1/2.0),(T+H/2.0))
    zK2=H*g3((x+xK1/2.0),(y+yK1/2.0),(z+zK1/2.0),(T+H/2.0))

    xK3=H*g1((x+xK2/2.0),(y+yK2/2.0),(z+zK2/2.0),(T+H/2.0))
    yK3=H*g2((x+xK2/2.0),(y+yK2/2.0),(z+zK2/2.0),(T+H/2.0))
    zK3=H*g3((x+xK2/2.0),(y+yK2/2.0),(z+zK2/2.0),(T+H/2.0))

    xK4=H*g1((x+xK3),(y+yK3),(z+zK3),(T+H))
    yK4=H*g2((x+xK3),(y+yK3),(z+zK3),(T+H))
    zK4=H*g3((x+xK3),(y+yK3),(z+zK3),(T+H))

    x=x+(xK1+2*(xK2+xK3)+xK4)/6.
    y=y+(yK1+2*(yK2+yK3)+yK4)/6.
    z=z+(zK1+2*(zK2+zK3)+zK4)/6.

    solx.append(x)
    soly.append(y)
```

```

    solz.append(z)
    solt.append(T)

#soluções 2D
'''
plt.plot(solx,soly)
plt.xlabel('soluções para x', size=12)
plt.ylabel('soluções para y', size=12)
plt.title(fr='{r}', sigma={sigma}, b={b:.2}')
'''

#soluções x,y,z em função de t
'''
plt.plot(solt,solx)
plt.plot(solt,soly)
plt.plot(solt,solz)
plt.title('azul=x; laranja=y; verde=z', fontweight='bold')
plt.ylabel('Soluções para x,y,z', size=12)
plt.xlabel('Tempo', size=12)
plt.savefig('Lorenz.svg')
'''

#plotar em 3D
'''
figura = plt.figure()
grafico = figura.gca(projection='3d')
grafico.plot(solx,soly,solz, color='purple')
#plt.savefig('Lorenz.svg')
grafico.set_xlabel('X')
grafico.set_ylabel('Y')
grafico.set_zlabel('Z')
'''

```

- **Atrator de Rossler pelo método de Euler no python:**

```
#bibliotecas para gerar os gráficos
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d

#Parâmetros
a=0.2 ; b=0.2 ; c=5.7 ; dt=0.02
d=0.0 ; e=-8.0 ; f=1.0 ; n=100001

#soluções para x (dl), y (el) e z (fl)
dl = []
el = []
fl = []

#loop do método de euler
for i in range(1,n):
    x=d ; y=e ; z=f
    d=x+dt*(-y-z)
    e=y+dt*(x+a*y)
    f=z+dt*(b+z*(x-c))

    dl.append(d)
    el.append(e)
    fl.append(f)

#para fazer a figura em 3D

figura = plt.figure()
grafico = figura.gca(projection='3d')

grafico.plot(dl,el,fl, color='orange')
plt.savefig('3d ROSSLER.svg')

#Plotar em 2D
'''
plt.plot(el,fl)
plt.title('d = x+dt(-y-z) /-/ e = y+dt*(x+a*y)', fontweight='bold')
plt.xlabel('Eixo Y', size=12, fontweight='bold')
plt.ylabel('Eixo Z', size=12, fontweight='bold')
#plt.savefig('yz rossler')
'''
```

- **Mapa Logístico em python:**

```
import matplotlib.pyplot as plt

#parâmetros
xt=0.6

r = float(0.0)
l = []
m = []

#loop para resolver a equação do mapa logístico
while r<=4.0:
    r = r + 0.00002
    l.append(r)
    if r<=1:
        xt=0
        m.append(xt)
    elif 1<r<=3:
        xt = 1 - 1/r
        m.append(xt)
    else:
        xt = r*xt*(1-xt)
        m.append(xt)

#para plotar o gráfico
plt.plot(l,m,',')
plt.xlabel('r')
plt.ylabel('xt = r*xt*(1-xt)')
plt.show()
```

APÊNDICE B – PUBLICAÇÕES

Este apêndice está dedicado para divulgar os artigos em que o autor deste trabalho de conclusão de curso fez parte durante sua jornada na iniciação científica.

Na figura A1 temos um print da primeira colaboração do autor em um artigo científico. Nosso artigo publicado na revista “Physical Review A” em fevereiro do ano de 2020.

Figura A1. Print do artigo “Lévy flights for light in ordered lasers”.

PHYSICAL REVIEW A **101**, 023820 (2020)

Lévy flights for light in ordered lasers

Erick G. Rocha¹, Emanuel P. Santos,¹ Bruno J. dos Santos,¹ Samuel S. de Albuquerque,¹ Pablo I. R. Pincheira²,
Carlos Argolo,^{1,3} and André L. Moura^{1,*}

¹*Grupo de Física da Matéria Condensada, Núcleo de Ciências Exatas – NCEX, Campus Arapiraca, Universidade Federal de Alagoas, 57309-005 Arapiraca-AL, Brazil*

²*Departamento de Ciencias Físicas, Universidad de La Frontera, Temuco, Chile*

³*Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Estado de Alagoas, 57020-510 Maceió-AL, Brazil*



(Received 25 November 2019; accepted 23 January 2020; published 14 February 2020)

Lévy flights for light have been demonstrated in disordered systems with and without optical gain and remained unobserved in ordered ones. In the present article, we investigate, numerically and experimentally, Lévy flights for light in ordered systems due to an ordered (conventional) laser. The statistical analysis was performed on the intensity fluctuations of the output spectra upon repeated identical experimental realizations. We found out that the optical gain and the mirror reflectivity are critical parameters governing the fluctuation statistics. We identified Lévy regimes for gain around the laser threshold, and Gaussian-Lévy-Gaussian crossovers were unveiled when increasing the gain from below to above threshold. The experimental results were corroborated by Monte Carlo simulations, and the fluctuations were associated to a Langevin noise source that takes into account the randomness of the spontaneous emission, which seeds the laser emission and can cause large fluctuations of the output spectra from shot to shot under identical experimental realizations.

Fonte: O autor (2020).

O projeto teve como motivação a investigação da distribuição de Lévy, já bem conhecida na física estatística, no âmbito da óptica e fotônica. A partir de muitas referências onde foram encontrados os chamados “voos de Lévy” para luz, notamos que esses eventos tinham sido até então observados apenas em sistemas desordenados, como em lasers aleatórios. A partir disto, é possível concluir que os voos de Lévy para a luz são exclusivos de sistemas desordenados e que isso daria uma característica peculiar aos meios desordenados. Porém, mostramos que esse tipo de física, isto é, os voos de Lévy para a luz também ocorre em um sistema ordenado o que nos levou à publicação cujo print é a figura A1.

Após a finalização do artigo acima mencionado, trabalhamos com duas novas perspectivas dentro do contexto da óptica: Caos e Nanotermometria. A princípio são duas vertentes bem distintas, de modo como as descrevemos no capítulo 9 deste trabalho.




Diante do cenário da nanotermometria, publicamos um artigo a qual disponho o print na figura A2. Um breve resumo desta publicação foi feito no capítulo 9 anteriormente.

Figura A2. Print do artigo “Photon-avalanche-like upconversion in NdAl₃(BO₃)₄ nanoparticles excited at 1064nm”.

Applied Physics Letters	ARTICLE	scitation.org/journal/apl
-------------------------	---------	---

Photon-avalanche-like upconversion in NdAl₃(BO₃)₄ nanoparticles excited at 1064 nm

Cite as: Appl. Phys. Lett. **117**, 151102 (2020); doi: [10.1063/5.0024619](https://doi.org/10.1063/5.0024619)
 Submitted: 9 August 2020 · Accepted: 2 October 2020 ·
 Published Online: 13 October 2020

Jefferson F. da Silva,¹  Rodrigo F. da Silva,¹ Emanuel P. Santos,¹  Lauro J. Q. Maia,² and André L. Moura^{1,3,a)} 


AFFILIATIONS


¹Grupo de Física da Matéria Condensada, Núcleo de Ciências Exatas-NCEX, Campus Arapiraca, Universidade Federal de Alagoas, 57309-005 Arapiraca, AL, Brazil


²Instituto de Física, Universidade Federal de Goiás, 74690-900 Goiânia, GO, Brazil

³Programa de Pós-graduação em Física, Instituto de Física, Universidade Federal de Alagoas, 57072-900 Maceió, AL, Brazil

^{a)}Author to whom correspondence should be addressed: andre.moura@fis.ufal.br

 [View Online](#)

 [Export Citation](#)

 [CrossMark](#)

Fonte: O autor (2020).