UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS-UFAL
CAMPUS ARAPIRACA
MATEMÁTICA-LICENCIATURA

RIQUELE GAMA DOS SANTOS

A RECÍPROCA DO TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH

ARAPIRACA
2022

Riquele Gama dos Santos

A recíproca do teorema do ponto fixo de Banach

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), apresentado ao corpo docente do curso Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Alagoas - UFAL, Campus Arapiraca, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Moreno Pereira Bonutti

Arapiraca

2022

Universidade Federal de Alagoas – UFAL
Campus Arapiraca
Biblioteca *Campus* Arapiraca - BCA

S237r Santos, Riquele Gama dos
A recíproca do teorema do ponto fixo de Banach / Riquele Gama dos Santos. – Arapiraca, 2022.
24 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Moreno Pereira Bonutti.
Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Alagoas, *Campus* Arapiraca, Arapiraca, 2022.
Disponível em: Universidade Digital (UD) – UFAL (*Campus* Arapiraca).
Referências: f. 24.

1. Teorema do ponto fixo de Banach. 2. Sequências convergentes. 3. Espaço métrico completo. I. Bonutti, Moreno Pereira. II. Título.

CDU 51

Bibliotecário responsável: Nestor Antonio Alves Junior
CRB - 4 / 1557

Riquele Gama dos Santos

A recíproca do teorema do ponto fixo de Banach

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Alagoas-UFAL, Matemática Licenciatura.

Data de Aprovação: 14/01/2022

Banca Examinadora

gov.br Documento assinado digitalmente
Moreno Pereira Bonutti
Data: 03/02/2022 07:55:36-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Moreno Pereira Bonutti
Universidade Federal de Alagoas - UFAL
Campus Arapiraca
(Orientador)

gov.br Documento assinado digitalmente
Alcindo Teles Galvao
Data: 07/02/2022 09:39:32-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Alcindo Teles Galvão
Universidade Federal de Alagoas - UFAL
Campus Arapiraca
(Examinador)

gov.br Documento assinado digitalmente
Ornan Filipe de Araujo Oliveira
Data: 04/02/2022 17:12:29-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Me. Ornan Filipe de Araujo Oliveira
Universidade Federal de Alagoas - UFAL
Campus Arapiraca
(Examinador)

Dedico este trabalho aos meus pais, meu esposo e amigos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, por me dar forças e discernimento para contornar os problemas da vida, e ao mesmo tempo, por me entregar paz para que eu pudesse continuar com minha jornada.

Agradeço aos meus pais, José Agnaldo e Rosicleia, pela dedicação em me dar o sustento para que eu pudesse focar nos estudos.

Agradeço ao meu esposo, Jonas Luiz, por sempre me apoiar e incentivar em todas as minhas atividades.

Agradeço a todos que me emprestaram o notebook para que eu pudesse realizar meus trabalhos escolares que por motivos financeiros, não podia comprar um.

Agradeço ao meu professor e orientador, Moreno Bonutti, pela paciência, compreensão, puxões de orelha e atenção que me deu durante todo este trabalho.

Agradeço aos meus amigos companheiros: Bruno, Roberto, Carlos, Manoel, Elisângela, Moisés, Laís e Douglas, pelas manhãs e madrugadas de estudos.

Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é senão uma gota de água no mar. Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota.

Madre Teresa de Calcutá

RESUMO

Apresentamos o Teorema do Ponto Fixo de Banach, um resultado bastante importante sobre espaços métricos, um ramo de grande valor na área da matemática. Além disso, é um dos teoremas mais relevantes para a demonstração da existência e unicidade de soluções para Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Primeiramente, apresentamos alguns conceitos prévios necessários para este estudo, definindo algumas noções sobre espaços métricos e convergência de sequências. Logo em seguida, é feito a demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach, e após, fica uma indagação: será que vale a recíproca do Teorema do Ponto Fixo de Banach? E por fim, finalizamos este trabalho com a resposta a essa pergunta.

Palavras-chave: teorema do ponto fixo de Banach; sequências convergentes; espaço métrico completo.

ABSTRACT

We present the Banach Fixed Point Theorem, a very important result on metric spaces, an area of great value in the field of mathematics. Furthermore, it is one of the most relevant theorems for demonstrating the existence and uniqueness of solutions for Ordinary Differential Equations (ODEs). First, we present some previous concepts necessary for this study, defining some notions about metric spaces and convergence of sequence. After, the Banach Fixed Point Theorem is demonstrated, and after that, there is a question: is the reciprocal of the Banach Fixed Point Theorem valid? And finally, we end this work with the answer to this question.

Keywords: Banach fixed point theorem; converging sequences; full metric space.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EDO	Equação Diferenciável Ordinária
EDP	Equação Diferenciável Parcial
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
TCC	Trabalho de Conclusão do Curso
UFAL	Universidade Federal de Alagoas
UFFS	Universidade Federal da Fronteira Sul

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O Teorema do Ponto Fixo de Banach, também conhecido como o Teorema da Contração Uniforme é um resultado sobre espaço métrico. Um espaço de Banach é um Espaço Vetorial Normado Completo. O nome dado é em homenagem ao matemático polaco Stefan Banach (1892 - 1945), que contribuiu de forma significativa em Análise Funcional.

Em 1932, Stefan Banach apresentou o "Théorie des opérations linéaires", o trabalho considerado mais importante da sua carreira, aqui iremos abordar o conceito de topologia em espaços métricos, seguido da noção de Espaços de Banach.

Neste trabalho, apresentaremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach e a sua demonstração, o teorema garante que: "Se M é um espaço métrico completo, toda contração $f : M \to M$ possui um único ponto fixo em M."

O presente teorema é bastante usado para demonstrar o Teorema de Existência e Unicidade para Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) que são equações na qual, as variáveis envolvem funções e, também, suas derivadas. As equações diferencias são utilizadas, principalmente, para modelar matematicamente fenômenos da natureza, como, por exemplo, reações químicas. Este Teorema de Existência e Unicidade mostra se existe a solução de uma EDO e se esta solução é única.Tendo em vista a importância do Teorema do Ponto Fixo de Banach, o matemático Ehrhard Behrends questionou a recíproca deste teorema, ou seja, seja M um espaço métrico, se toda contração $f : M \to M$ possui um único ponto fixo em M, então M é completo?

Usando um contraexemplo mostraremos que a recíproca do Teorema do Ponto Fixo de Banach não vale, mas Ehrhard Behrends não se contentou com essa resposta e lançou mais dois questionamentos:

1. Existe algum aberto (não-fechado) em $\mathbb{R}^n$ em que toda contração admita um ponto fixo?
2. Existe algum exemplo "simples"de subconjunto de $\mathbb{R}$ em que toda contração admita um ponto fixo?

Este trabalho foi dividido da seguinte maneira: no capítulo 2 será abordado alguns conceitos topológicos de espaços métricos fundamentais para a compreensão deste projeto, como a definição de funções contínuas e lipschitzianas, convergência de sequências e espaços métricos. No capítulo 3 é enunciado o Teorema do ponto Fixo de Banach, assim como, a sua demonstração e uma breve apresentação da aplicação deste teorema. No capítulo 4 mostraremos se vale, de fato, a recíproca do teorema.

2 CONCEITOS TOPOLÓGICOS

Alguns conceitos prévios são muito importantes para o desenvolvimento e entendimento deste trabalho. Para melhor compreensão se faz importante ter o conhecimento sobre alguns assunto como: espaços métricos, sequências, conjunto limitado, função contínua, função lipschitz, entre outros. As informações contidas neste capítulo tiveram como referência o livro Curso de Análise vol. 1, (LIMA,2019) e o livro Espaços Métricos, (LIMA,2013).

2.1 ESPAÇOS MÉTRICOS

Desde muitos anos, a humanidade teve a necessidade de medir distâncias entre objetos, pontos, lugares, entre outros. E com isso foram surgindo diversas maneiras para medir estas distâncias, as quais chamaremos de métrica. Os espaços métricos são conjuntos arbitrários da natureza onde podemos definir uma métrica.

Definição 2.1.1. *Uma Métrica em um conjunto M é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada par ordenado $x, y \in$ M um número real d(x,y), chamado a distância de x a y, de modo que satisfaça as condições abaixo:*

1. $d(x, x) = 0$;
2. $x \neq y \Rightarrow d(x, y) > 0$;
3. $d(x, y) = d(y, x)$;
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$;

para quaisquer x, y e $z \in M$.

Os itens 1 e 2 dizem que $d(x, y) \geq 0$ e que $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$. O item 3 afirma que a distância é uma função simétrica e o ítem 4 chama-se *Desigualdade Triangular*.

Definição 2.1.2. *Um **Espaço Métrico** é um par (M, d) onde M é um conjunto e d é uma métrica.*

Exemplo 2.1.1. *Considerando o conjunto $\mathbb{R}$, a função $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}+$, dada por $d(x, y) = |x - y|$, com $x, y \in \mathbb{R}$, satisfaz:*

1. $d(x, x) = |x - x| = |0| = 0$;
2. *Seja $x \neq y$, se $x > y$ temos: $d(x, y) = |x - y| = x - y > 0$. Para $y > x$, $d(x, y) = |x - y| = y - x > 0$;*

3. $d(x,y) = |x-y| = |(-1)(y-x)| = |-1|.|y-x| = 1.|y-x| = |y-x| = d(y,x)$*;*

4. $d(x,z) = |x-z| = |x+(-y+y)-z| = |(x-y)+(y-z)| \leq |x-y|+|y-z| = d(x,y)+d(y,z)$*;*

Dessa maneira, d é uma métrica sobre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$ é um espaço métrico.

Exemplo 2.1.2. *No espaço euclidiano* $\mathbb{R}^n$*, pode-se definir três métricas distintas, a saber, seja* $x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ *e* $y = (y_1, y_2, y_3, ..., y_n)$*, temos:*

- $d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}$ *;*
- $d'(x,y) = |x_1-y_1| + \ldots + |x_n-y_n|$ *;*
- $d''(x,y) = \max_{1\leq i\leq n}\{|x_i-y_i|\}$.

Mostraremos que d*,* d' *e* d'' *são métricas do* $\mathbb{R}^n$ *verificando as quatro condições de métrica:*

(i) Para $x \in \mathbb{R}$*,*

$$\begin{aligned} d(x,x) &= \sqrt{(x_1-x_1)^2 + \ldots + (x_n-x_n)^2} = \sqrt{0+...+0} = \sqrt{0} = 0; \\ d'(x,x) &= |x_1-x_1| + \ldots + |x_n-x_n| = |0| + ... + |0| = 0; \\ d''(x,x) &= \max\{|x_1-x_1|, ..., |x_n-x_n|\} = \max\{0, ..., 0\} = 0. \end{aligned}$$

(ii) Para $x \neq y$ *com* $x, y \in \mathbb{R}$*,*

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2} \geq \sqrt{(x_i-y_i)^2} = |x_i-y_i| > 0; \\ d'(x,y) &= |x_1-y_1| + \ldots + |x_n-y_n| \geq |x_i-y_i| > 0; \\ d''(x,y) &= \max\{|x_1-y_1|, ..., |x_n-y_n|\} \geq |x_i-y_i| > 0. \end{aligned}$$

(iii) Se $x, y \in \mathbb{R}$*,*

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2} = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + \ldots + (y_n-x_n)^2} = d(y,x); \\ d'(x,y) &= |x_1-y_1| + \ldots + |x_n-y_n| = |y_1-x_1| + \ldots + |y_n-x_n| = d(y,x); \\ d''(x,y) &= \max\{|x_1-y_1|, ..., |x_n-y_n|\} = \max\{|y_1-x_1|, ..., |y_n-x_n|\} = d(y,x). \end{aligned}$$

(iv) Se $x, y, z \in \mathbb{R}$*, na métrica* d*, consideraremos a norma* $||x||$[1]*, logo:*

$$\begin{aligned} d(x,y) &= ||x-y|| = ||x-z+z-y|| \leq ||x-z|| + ||z-y|| \Rightarrow \\ \Rightarrow d(x,y) &\leq d(x,z) + d(z,y) \end{aligned}$$

[1] A norma é uma métrica de um espaço vetorial, a demonstração encontra-se em ENDO (2015).

$$
\begin{aligned}
d'(x,y) &= |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n| \\
&= |x_1 - z_1 + z_1 - y_1| + \ldots + |x_n - z_n + z_n - y_n| \\
&\leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + \ldots + |x_n - z_n| + |z_n - y_n| \\
&= d'(x,z) + d'(z,y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d''(x,y) &= \max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\} \\
&= \max\{|x_1 - z_1 + z_1 - y_1|, ..., |x_n - z_n + z_n - y_n|\} \\
&\leq \max\{|x_1 - z_1| + |z_1 - y_1|, ..., |x_n - z_n| + |z_n - y_n|\} \\
&= \max\{|x_1 - z_1| + |x_n - z_n|\} + \max\{|z_1 - y_1|, ..., +|z_n - y_n|\} \\
&= d''(x,z) + d''(z,y)
\end{aligned}
$$

$\square$

Logo, mostramos que d, d' *e* d'' *são métricas do* $\mathbb{R}^n$.

2.2 FUNÇÃO CONTÍNUA E FUNÇÃO LIPSCHITZIANA

Definição 2.2.1. *Sejam* M, N *espaços métricos. Diz-se que a aplicação* $f : M \to N$ *é contínua no ponto* $a \in M$ *quando,* $\forall\ \varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon,$$

$\forall x \in M$, *diz-se que* f *é contínua, quando ela é contínua para todos os pontos* $a \in M$.

Equivalentemente dizemos que f *é contínua no ponto* a *se* $\lim_{x\to a} f(x)$ *existir e se* $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$.

Exemplo 2.2.1. *Prove formalmente que a função* $f(x) = 2x + 1$ *é contínua para* $x = 2$.

Solução:

Temos que: $|f(x) - f(2)| = |2x + 1 - 5| = |2x - 4| = |2.(x - 2)| = |2|.|x - 2| = 2.|x - 2| < \varepsilon \Rightarrow |x - 2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Portanto, dado um $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ *tal que se* $0 < |x - 2| < \delta$, *então* $0 < |f(x) - f(2)| < \varepsilon$.

Exemplo 2.2.2. *Verifique se a função*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}, \text{ se } x > 1 \\ 2 - x, \text{ se } x \leq 1 \end{cases}$$

é contínua em $x = 1$.

Solução: Temos que $f(1) = 1$. Agora precisamos calcular o limite de $f(x)$, com x tendendo a 1. Se o limite existir e for igual a $f(1)$, então f(x) será contínua no ponto $x = 1$. Como trata-se de uma função por partes, iremos calcular os limites laterais:

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(2-x) = 1$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{(x+2)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} x+2 = 3$

Como os limites laterais são diferentes, então o $\lim_{x\to 1}$ não existe, logo a função $f(x)$ não é contínua em $x = 1$.

Definição 2.2.2. *Sejam M, N espaços métricos. Diz-se que a aplicação $f : M \to N$ é uniformemente contínua quando, $\forall\ \varepsilon > 0$ dado, existir $\delta > 0$ tal que sejam quais forem $x, y \in M$ temos:*

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Note que na continuidade, tomamos um a fixo, tornando $f(x)$ próximo de $f(a)$ desde que x esteja suficientemente próximo de a, enquanto que na Continuidade Uniforme tomamos um x e um y, tornando $f(x)$ próximo de $f(y)$ desde que x esteja próximo o suficiente de y. Observe que se f é uniformemente contínua, então f é também contínua, basta tomar $x = a$, mas a recíproca não é verdadeira. Observe o próximo exemplo.

Exemplo 2.2.3. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ é contínua. Verifique se esta função é uniformemente contínua também.*

Dado $\varepsilon = 1$, tome $x = n$ e $y = n + \dfrac{1}{n}$. Então, $\forall n \in \mathbb{N}$, tome $\delta > 0$ tal que $\delta > \dfrac{1}{n}$, e temos que:

$$|x-y| = \left|n - \left(n + \frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{n} < \delta,$$

mas,

$$|f(x) - f(y)| = \left|n^2 - \left(n + \frac{1}{n}\right)^2\right| = \left|-2 - \frac{1}{n^2}\right| = 2 + \frac{1}{n^2} > 1 = \varepsilon$$

ou seja, f não é uniformemente contínua.

Definição 2.2.3. *Sejam M, N espaços métricos. Diz-se que a aplicação $f : M \to N$ é lipschitziana quando existe uma constante $k > 0$, chamada Constante de Lipschitz, tal que $d(f(x), f(y)) \leq k.d(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$.*

Teorema 2.2.1. *Sejam M, N espaços métricos e $f : M \to N$ uma função lipschitziana, então f é uniformemente contínua.*

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$ e $k > 0$, tomando $d(x,y) < \delta$, $x, y \in M$, com $\delta := \dfrac{\varepsilon}{k}$, pela definição de função lipschitziana, temos:

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq k.d(x,y) \\ &< k.\delta \\ &< k.\frac{\varepsilon}{k} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Portanto, f é uniformemente contínua em M.

□

Uma função é dita **contração uniforme** se sua constante de lipschitz for menor que 1.

Exemplo 2.2.4. *A função $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{x}$, métrica dada pelo módulo já que estamos trabalhando no conjunto dos números reais, é uma contração uniforme. De fato:*

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \\ &= |\sqrt{x} - \sqrt{y}|.\frac{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} \\ &= \frac{1}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|}.|x - y| \end{aligned}$$

Como $x, y \geq 1$, então $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2$, ou seja, $\dfrac{1}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} \leq \dfrac{1}{2}$.
Portanto,

$$d(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{2}.|x - y|$$

2.3 SEQUÊNCIAS

O Teorema do Ponto Fixo de Banach é aplicado em espaços métricos completos, definição esta que será estudada posteriormente, e para a compreenção desta definição é necessário entender o que é uma sequência.

Definição 2.3.1. *Uma sequência em um espaço métrico M é uma aplicação $x : \mathbb{N} \to M$, definida no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$, dada por $x(i) = x_i \in M$.*

Usaremos a notação (x_n) para indicar a sequência $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...)$ cujo n-ésimo termo é x_n.

Definição 2.3.2. *Seja (X_n) uma sequência num espaço métrico M, diz-se que o ponto $a \in M$ é limite da sequência (X_n) quando, $\forall\, \varepsilon > 0$, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$.*

Dessa forma, quando existe o $\lim x_n = a$, dizemos que a sequência (X_n) é convergente e converge para a. Caso contrário, dizemos que a sequência (X_n) é divergente.

Exemplo 2.3.1. *A sequência (0,1,0,1,...) é divergente, pois o limite da sequência não existe.*

Exemplo 2.3.2. *Dada a sequência $x_n = \left(\frac{1}{n}\right)$, temos que o $\lim \frac{1}{n} = 0$. De fato, dado um $\varepsilon > 0$ tomamos $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ e vemos que:*

$$n > n_0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Portanto, de fato, a sequência X_n converge.

Teorema 2.3.1. *O limite de uma sequência (X_n) convergente é único.*

Demonstração: Suponhamos que existam dois limites para a sequência (X_n), ou seja, $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$. Agora, digamos que:

$$\varepsilon = \frac{\| a - b \|}{2} > 0.$$

Dessa forma, pela definição, existe um $n_1 \in \mathbb{N}$, com $n > n_1$ tal que:

$$\| x_n - a \| < \varepsilon$$

Da mesma forma existe um $n_2 \in \mathbb{N}$, com $n > n_2$ tal que:

$$\| x_n - b \| < \varepsilon$$

.

Tomemos um $n_0 = max\{n_1, n_2\}$, assim, $n > n_0$ implica que:

$$\| a - b \| = \| a - x_n + x_n - b \| \leq \| a - x_n \| \ + \ \| x_n - b \| < 2\varepsilon \ = \| a - b \| .$$

O que é um absurdo. Portanto, de fato, o limite de uma sequência convergente é único.

$\square$

2.4 ESPAÇO MÉTRICO COMPLETO

Até aqui foi apresentado a definição de espaço métrico, que é dado por um conjunto que dispõe de uma métrica. O espaço métrico completo possui mais uma condição: que toda Sequência de Cauchy no espaço seja convergente. Vejamos a definição de Sequência de Cauchy:

Definição 2.4.1. *Uma sequência x_n em um espaço métrico M, chama-se Sequência de Cauchy quando $\forall \varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$.*

Proposição 2.4.1. *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração: No espaço Métrico Completo M, se $\lim x_n = a$, então dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Tomando $m, n > n_0$, obteremos:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo, (X_n) é de Cauchy.

$\square$

Portanto, a sequência $(X_n) = \dfrac{1}{n}$ do Exemplo 2.3.2 é de Cauchy, pois a sequência é convergente.

Exemplo 2.4.1. *Nem toda Sequência de Cauchy é convergente. Tomemos a sequência de números racionais (X_n) convergindo para um número irracional:*

$$x_k = \frac{m_k}{n_k},\ m_0 = n_0 = 1 \text{ e } k \geq 0, \text{ com}$$
$$m_{k+1} = m_k + 2n_k \text{ e } n_{k+1} = m_k + n_k, \text{ ou seja}$$

$$(X_n) = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \ldots\right)$$

A sequência sugerida $x_k = \dfrac{m_k}{n_k}$ converge para $\sqrt{2}$. A sequência é convergente em $\mathbb{R}$ e pela Preposição 2.4.1 ela é uma Sequência de Cauchy no espaço métrico $\mathbb{Q}$, mas não é convergente em $\mathbb{Q}$.

Definição 2.4.2. *Um espaço métrico diz-se Espaço Métrico Completo quando toda sequência de Cauchy em M é convergente, isto é, se (X_n) é uma sequência de Cauchy em M, então existe $a \in M$ tal que $\lim x_n = a$.*

Exemplo 2.4.2. *Como vimos no Exemplo 2.4.1, nem toda Sequência de Cauchy no espaço métrico* $\mathbb{Q}$ *é convergente, dessa maneira,* $\mathbb{Q}$ *não é um Espaço Métrico Completo. Porém, todo espaço métrico com a métrica zero-um (LIMA, 2013, p.02) é completo, pois toda Sequência de Cauchy é constante para todo* $n > n_0$*, com* $n_0 \in \mathbb{N}$ *e, consequentemente, convergente.*

3 O TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH E ALGUMAS APLICAÇÕES

Usando uma calculadora vamos calcular o $\cos 1$ irá obter aproximadamente o valor de 0,5403023059. Continuando com os cálculos, temos:

$$\begin{aligned}
\cos 1 &\approx 0,5403023059 \\
\cos 0,5403023059 &\approx 0,8575532158 \\
\cos 0,8575532158 &\approx 0,6542897905 \\
\cos 0,6542897905 &\approx 0,7934803587 \\
\cos 0,7934803587 &\approx 0,7013687736 \\
\cos 0,7013687736 &\approx 0,7639596829
\end{aligned}$$

Seguindo essa lógica, ao fazer este cálculo 58 vezes, você chegará em

$$\cos 0,7390851332 = 0,7390851332$$

A partir daí, sempre que calcular o cosseno de 0,7390851332, ele continuará se aproximando cada vez mais dele mesmo. Isso é o que chamamos de ponto fixo, se $f(x) = x$, então x é um ponto fixo de f.

3.1 TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH

Teorema 3.1.1. *Se M é um espaço métrico completo, toda contração uniforme $f : M \to M$ possui um único ponto fixo em M. Ou seja, se pusermos $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, ..., $x_{n+1} = f(x_n)$ a sequência x_n converge em M e $a = \lim x_n$ é o único ponto fixo de f.*

Demonstração: Tendo em vista que f é uma contração e toda contração é uniformemente contínua, então f é contínua. Supondo por hipótese que a sequência é convergente, ou seja, $\lim x_n = a$, usando a continuidade de f tem-se:

$f(a) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = a$,

Logo, a é um ponto fixo de f.

Agora, supondo que existam, a e b, dois pontos fixos de f, então vale que $f(a) = a$ e $f(b) = b$. Desta maneira, temos que:

$d(f(a), f(b)) \leq k.d(a, b)$, com $0 < k < 1$, pois f é uma contração uniforme.

Como $f(a) = a$ e $f(b) = b$, temos:

$$\begin{array}{rlcl} & d(f(a),f(b)) & \leq & k.d(a,b) \\ \Rightarrow & d(a,b) & \leq & k.d(a,b) \\ \Rightarrow & d(a,b)-k.d(a,b) & \leq & 0 \\ \Rightarrow & d(a,b).(1-k) & \leq & 0 \end{array}$$

Como $(1-k)>0$, pois $0<k<1$, e $d(a,b)\geq 0$, então $d(a,b)=0$, e pela propriedade de métrica $a=b$, dessa forma, podemos concluir que o ponto fixo é único.

Agora basta provar que a sequência (x_n) realmente converge.

Sendo f uma contração uniforme e como $x_1=f(x_0)$, $x_2=f(x_1)$, $x_3=f(x_2)$, ... , $x_{n+1}=f(x_n)$ temos:

$d(x_1,x_2)=d(f(x_0),f(x_1))\leq k.d(x_0,x_1)$

$d(x_2,x_3)=d(f(x_1),f(x_2))\leq k.d(x_1,x_2)\leq k^2.d(x_0,x_1)$

$d(x_3,x_4)=d(f(x_2),f(x_3))\leq k.d(x_2,x_3)\leq k^3.d(x_0,x_1)$

Repetindo este raciocínio, de modo geral, usando o Princípio de Indução Finita, temos:

$d(x_n,x_{n+1})\leq k^n.d(x_0,x_1)$

Assim,

$d(x_n,x_{n+p})\leq d(x_n,x_{n+1})+d(x_{n+1},x_{n+2})+...+d(x_{n+p-1},x_{n+p})$

$\Rightarrow d(x_n,x_{n+p})\leq [k^n+k^{n+1}+...+k^{n+p-1}].d(x_0,x_1)$

$\Rightarrow d(x_n,x_{n+p})\leq k^n[1+k+...+k^{p-1}].d(x_0,x_1)$

$\Rightarrow d(x_n,x_{n+p})\leq k^n.\dfrac{1}{1-k}.d(x_0,x_1)$

Como $\dfrac{1}{1-k}.d(x_0,x_1)>0$ e tendo em vista que $0<k<1$, então $\lim k^n=0$, logo existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $d(x_n,x_{n+p})\leq\varepsilon$, com $\varepsilon>0$, $\forall\, n\geq n_0$. Portanto x_n é uma sequência de Cauchy em um espaço métrico completo M, sendo assim, a sequência converge e converge para um único ponto fixo.

$\square$

4 A RECÍPROCA DO TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH

O Teorema do Ponto Fixo de Banach garante que em um espaço métrico completo, toda contração uniforme admita um único ponto fixo, no entanto, E. Behrends mostrou que a recíproca deste teorema não é verdadeira e questionou se existe algum espaço em que a recíproca seja verdadeira.

Teorema 4.0.1. *Seja* $X = graf(sen\frac{1}{x})$ *onde* $0 < x \leq 1$. *Então,* $X \subset \mathbb{R}^2$ *é um conjunto não fechado satisfazendo a condição da propriedade do ponto fixo de Banach.*

Demonstração: Inicialmente note que $(0,0) \in \partial X$ (fronteira de X), mas $(0,0) \notin X$, ou seja, X não é fechado, pois o fecho de X é diferente de X (LIMA,2019).

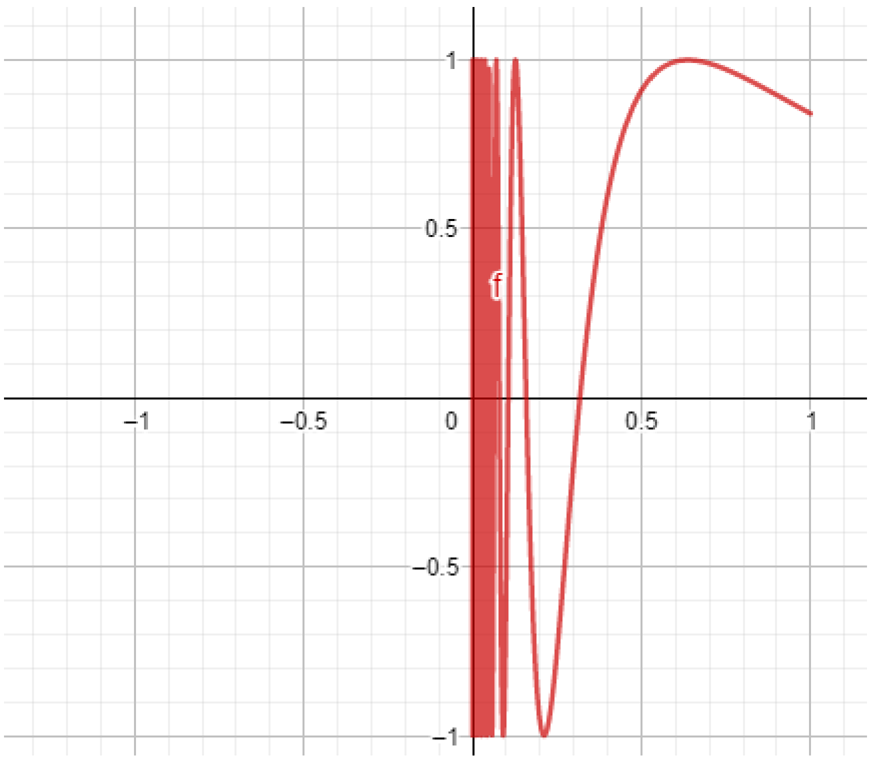
Agora, considere $f : X \to X$, uma contração uniforme e $x, y \in X$, ou seja,

$$||f(x) - f(y)|| \leq k.||x - y||$$

com $0 < k < 1$, considere também $H \subset (0, 1]$.

$$X_H = \{(x, sen(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2; x \in H\}$$

Figura 1 - Gráfico da função $sen(\frac{1}{x})$, onde $0 < x \leq 1$.



Fonte: A autora (2022).

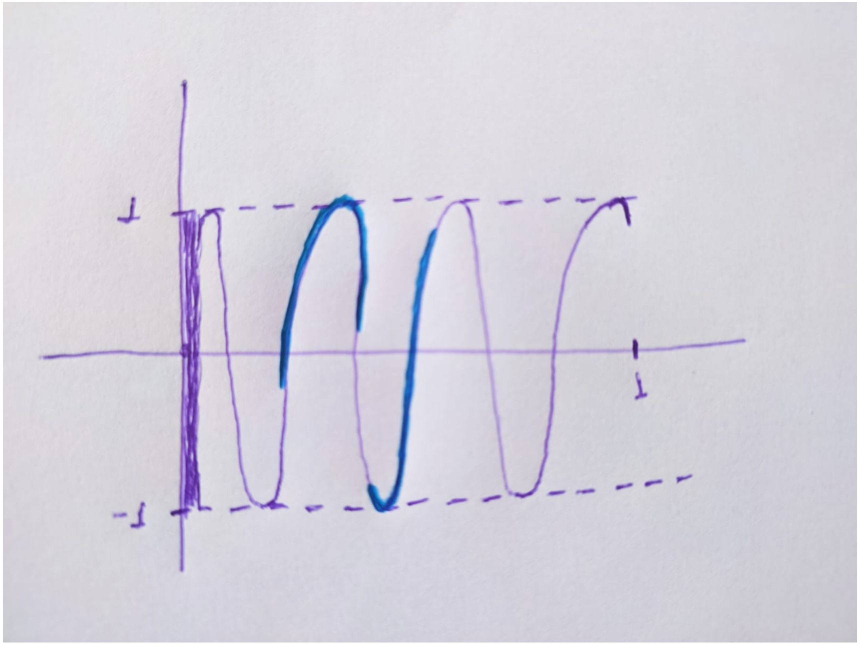
Diante disso, escolha $\varepsilon > 0$, tal que $diam(X_{(0,\varepsilon)})$, ou seja, a maior distância entre dois pontos quaisquer do conjunto $X_{(0,\varepsilon)}$, seja $< \frac{2}{k}$, com $0 < k < 1$, dessa forma podemos garantir que $diam(X_{(0,\varepsilon)}) < \dfrac{2}{k}$, pois $\dfrac{2}{k}$ é tão grande quanto se queira, com isso:

$$diam(X_{(0,\varepsilon)}) = \sup_{X_{(0,\varepsilon)}} ||x_1 - x_2|| < \frac{2}{k}$$

Mas $diam(f(X_{(0,\varepsilon)})) = \sup\limits_{f(X_{(0,\varepsilon)})} ||y_1 - y_2|| = \sup\limits_{f(X_{(0,\varepsilon)})} ||f(x_1) - f(x_2)||$, pela continuidade uniforme, temos: $\sup\limits_{f(X_{(0,\varepsilon)})} ||f(x_1) - f(x_2)|| \leq \sup\limits_{X_{(0,\varepsilon)}} k.||x_1 - x_2|| = \sup\limits_{X_{(0,\varepsilon)}} k.\dfrac{2}{k} = 2.$

Portanto, $diam(f(X_{(0,\varepsilon)})) < 2$, assim, $f(X_{(0,\varepsilon)})$ não possui um ponto de máximo e um mínimo local simultaneamente do conjunto X, pois as distâncias são menores que 2, tendo em vista que entre dois pontos com distâncias menores que 2 para este intervalo, podemos observar no gráfico, que ele possui um ponto máximo ou um mínimo local, mas não é possível admitir os dois simultaneamente dentro do intervalo $(0, \varepsilon)$.

Figura 2 - Ilustração da função $sen(\frac{1}{x})$, onde $0 < x \leq 1$.



Fonte: A autora (2022).

Daí, existe $\delta_1 > 0$, tal que $f(X_{(0,\varepsilon)}) \subset X_{[\delta_1,1]}$, além disso, existe $\delta_2 > 0$ tal que $f(X_{[\varepsilon,1]}) \subset X_{[\delta_2,1]}$, pois como em $f(X_{(0,\varepsilon)})$ não possui um mínimo e um máximo local simultaneamente, então vai existir um $\delta_1 > 0$ de forma que $f(X_{(0,\varepsilon)}) \subset X_{[\delta_1,1]}$ e como f é contínua, vai existir um $\delta_2 > 0$ de maneira que $f(X_{[\varepsilon,1]}) \subset X_{[\delta_2,1]}$.

Agora, tomando $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, então vale:

$$f(X_{(0,\varepsilon)}) \subset X_{[\delta,1]}$$

e

$$f(X_{[\varepsilon,1]}) \quad \subset \quad X_{[\delta,1]}$$

como $X = X_{(0,\varepsilon)} \bigcup X_{[\varepsilon,1]}$, então,

$$f(X) \quad \subset \quad X_{[\delta,1]} \subset \mathbb{R}^2$$

De fato, $X_{[\delta,1]}$ é fechado, portanto é completo, porque $\mathbb{R}^2$ é completo e pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, f admite único ponto fixo.

Então, f não é completo mas admite um único ponto fixo, dessa forma, podemos concluir que a recíproca do Teorema do Ponto Fixo de Banach não vale.

□

Como vimos na demonstração do teorema anterior, a recíproca do Teorema do Ponto Fixo de Banach não vale em $\mathbb{R}^2$, então no caso geral, a recíproca não é verdadeira. Mas E. Behrends questionou se existe algum aberto (não-fechado) em $\mathbb{R}^n$ com a propriedade do Ponto Fixo de Banach, ou seja, será que existe um aberto que não seja fechado em que toda contração admita um ponto fixo? O próprio E. Behrends mostrou em seus estudos que o único conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$ com a propriedade do ponto fixo de Banach é também fechado, ou seja, o próprio $\mathbb{R}^n$.

Com isso, E. Behrends instigou ainda mais seus estudos dessa recíproca questionando se existe algum exemplo "simples"do subconjunto $\mathbb{R}$ com a propriedade do Ponto Fixo de Banach. Em seus trabalho, ele chegou a conclusão que a recíproca do Teorema do Ponto Fixo de Banach na Reta é verdadeira apenas para conjuntos ambíguos.

REFERÊNCIAS

DASKALAKIS, C.; TZAMOS, C.; ZAMPETAKIS, M. A converse to Banach's fixed point theorem and its CLS-completeness. *In*: SIGACT SYMPOSIUM ON THEORY OF COMPUTING, 50., 2018, Los Angeles. **Anais** [...].Los Angeles: American Mathematical Society, 2018. p. 44-50.

ENDO, D. H. C. **Espaços métricos**: uma introdução. 2015. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2015.

LIMA, E. L. **Curso de análise, volume 1**. Rio de Janeiro: IMPA, 2019.

LIMA, E. L. **Espaços métricos**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013. (Coleção Projeto Euclides).

SILVA, M. S. **O modelo populacional de Lotka-Volterra para presa-predador**. 2016. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Alagoas, Campus Arapiraca, Arapiraca, 2016.

SOUZA, D. C.; SILVA JÚNIOR, V. M.; BARBOZA, E. M. Uma introdução aos espaços de Banach. *In*: SEMANA ACADÊMICA DO CURSO DE MATEMÁTICA, 4., 2021, Chapecó. **Anais** [...]. Chapecó: Universidade Federal da Fronteira Sul, 2021. p. 01-03.